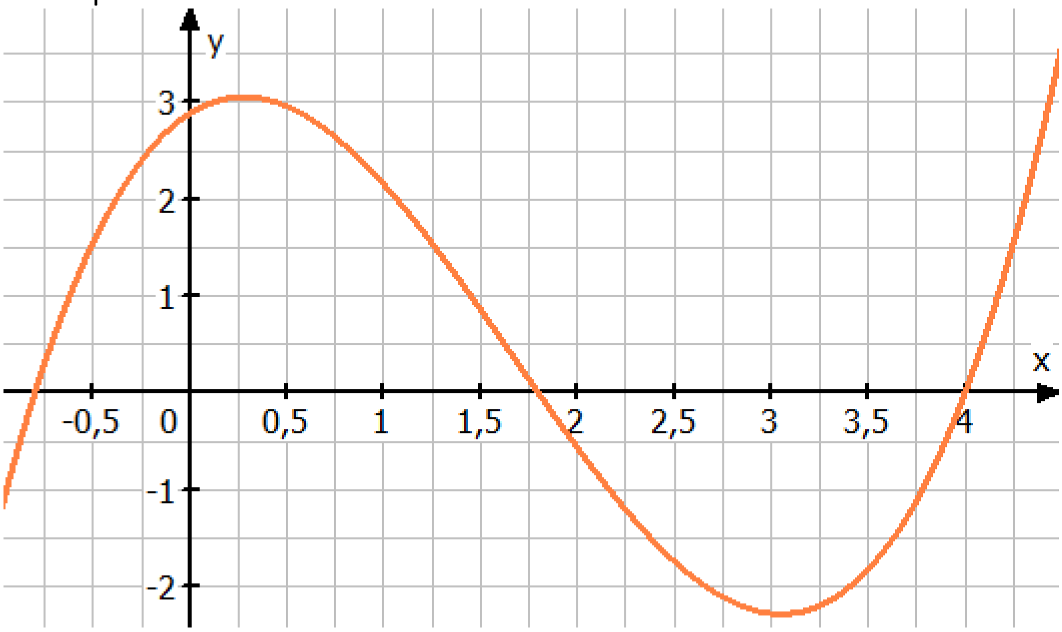
Ansgar Schiffler

Die Polynomdivision

Aufgabe 1: Es sollen die Nullstellen des Graphens der folgenden Funktion bestimmt werden.

$$y = f(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}28x + 2{,}88$$

Dies ist der Graph der Funktion:



Die erste Nullstelle können Sie durch Probieren erhalten (Sie setzen nacheinander verschiedene Werte für x in die Funktionsgleichung ein und prüfen, ob Sie als Ergebnis die Zahl 0 erhalten) oder Sie können die erste Nullstelle ablesen (falls Sie den Graphen gezeichnet haben).

Es gibt eine Nullstelle bei $x = 4$.

Probe: $f(4) = 0{,}5 \cdot 4^3 - 2{,}5 \cdot 4^2 + 1{,}28 \cdot 4 + 2{,}88 = 32 - 40 + 6{,}12 + 2{,}88 = 0$

Da eine Nullstelle bei $x = 4$ vorliegt, ist der Linearfaktor $(x - 4)$ im Funktionsterm enthalten.
Wir teilen nun den Funktionsterm durch $(x - 4)$

$$
\begin{array}{l}
(0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}28x + 2{,}88) : (x - 4) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 0{,}72 \\
-\underline{(0{,}5x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\quad -0{,}5x^2 + 1{,}28x \\
\qquad - \underline{(-0{,}5x^2 + 2x)} \\
\qquad\qquad\qquad -0{,}72x + 2{,}88 \\
\qquad\qquad\quad - \underline{(-0{,}72x + 2{,}88)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Wir erhalten: $(0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}28x + 2{,}88) : (x-4) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 0{,}72 \quad | \cdot (x-4)$

$$0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}28x + 2{,}88 = (0{,}5x^2 - 0{,}5x - 0{,}72) \cdot (x-4)$$

Dies ist das Ergebnis der Polynomdivision! Wir verwenden dieses Ergebnis, um die weiteren Nullstellen zu bestimmen.

Nullstellen eines Funktionsgraphens werden bestimmt, indem wir die Funktionsgleichung gleich null setzen und diese Gleichung dann nach x auflösen. Es ist also die folgende Gleichung nach x aufzulösen:

$$0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}28x + 2{,}88 = 0$$

Das Ergebnis der Polynomdivision ermöglicht es uns, diesen Term als Produkt aus zwei Termen zu schreiben:

$$(0{,}5x^2 - 0{,}5x - 0{,}72) \cdot (x-4) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist. Wir untersuchen also die beiden Faktoren getrennt.

$x - 4 = 0$ Diese Gleichung ist für $x = 4$ erfüllt (war uns bereits bekannt)

$0{,}5x^2 - 0{,}5x - 0{,}72 = 0$ Diese Gleichung können wir zum Beispiel mit Hilfe der pq-Formel nach x auflösen. Wir erhalten dann die beiden Lösungen: $x_1 = -0{,}8$ und $x_2 = 1{,}8$

Somit weist der Funktionsgraph die folgenden drei Nullstellen auf:

$$N_1(-0{,}8 \mid 0) \;;\; N_2(1{,}8 \mid 0) \;;\; N_3(4 \mid 0)$$

Der Funktionsterm lässt sich auch als Produkt von drei Linearfaktoren darstellen:

$$0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}28x + 2{,}88 = 0{,}5 \cdot (x+0{,}8) \cdot (x-1{,}8) \cdot (x-4)$$

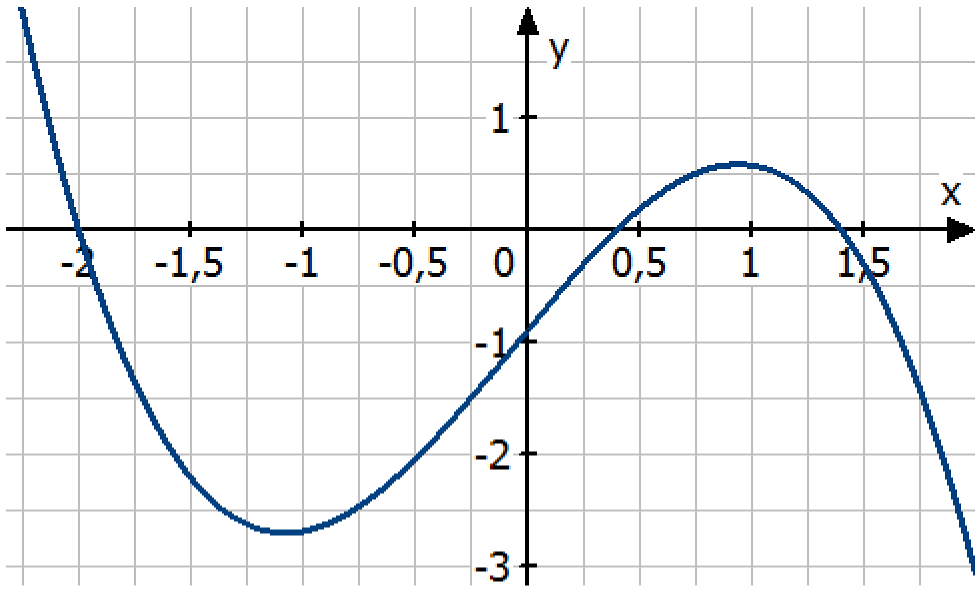
Die Polynomdivision

2. Übungsaufgabe:

Es sollen die Nullstellen des Graphens der folgenden Funktion bestimmt werden.

$$y = f(x) = -0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896$$

Dies ist der Graph der Funktion:



Die erste Nullstelle können Sie durch Probieren erhalten (Sie setzen nacheinander verschiedene Werte für x in die Funktionsgleichung ein und prüfen, ob Sie als Ergebnis die Zahl 0 erhalten) oder Sie können die erste Nullstelle ablesen (falls Sie den Graphen gezeichnet haben).

Es gibt eine Nullstelle bei $x = -2$.

Da eine Nullstelle bei $x = -2$ vorliegt, ist der Linearfaktor $(x + 2)$ im Funktionsterm enthalten.
Hinweis: Wenn wir in $x + 2$ $x = -2$ einsetzen, erhalten wir $-2 + 2 = 0$.
Wir teilen nun den Funktionsterm durch $(x + 2)$

$$(-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896) : (x + 2) = -0{,}8x^2 + 1{,}44x - 0{,}448$$
$$-\underline{(-0{,}8x^3 - 1{,}6x^2)}$$
$$+1{,}44x^2 + 2{,}432x$$
$$-\underline{(+1{,}44x^2 + 2{,}88x)}$$
$$-0{,}448x - 0{,}896$$
$$-\underline{(-0{,}448x - 0{,}896)}$$
$$0$$

Wir erhalten:

$(-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896) : (x + 2) = -0{,}8x^2 + 1{,}44x - 0{,}448 \quad | \quad \cdot (x + 2)$

$-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896 = (-0{,}8x^2 + 1{,}44x - 0{,}448) \cdot (x + 2)$

Dies ist das Ergebnis der Polynomdivision! Wir verwenden dieses Ergebnis, um die weiteren Nullstellen zu bestimmen.

Nullstellen eines Funktionsgraphens werden bestimmt, indem wir die Funktionsgleichung gleich null setzen und diese Gleichung dann nach x auflösen. Es ist also die folgende Gleichung nach x aufzulösen:

$$-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896 = 0$$

Das Ergebnis der Polynomdivision ermöglicht es uns, diesen Term als Produkt aus zwei Termen zu schreiben:

$$(-0{,}8x^2 + 1{,}44x - 0{,}448) \cdot (x + 2) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist. Wir untersuchen also die beiden Faktoren getrennt.

$x + 2 = 0$ Diese Gleichung ist für $x = -2$ erfüllt (war uns bereits bekannt)

$-0{,}8x^2 + 1{,}44x - 0{,}448 = 0 \quad | : (-0{,}8)$

$x^2 - 1{,}8x + 0{,}56 = 0$ mit der pq-Formel lösen ; $p = -1{,}8$; $q = 0{,}56$ $\quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$$x_{1/2} = 0{,}9 \pm \sqrt{0{,}9^2 - 0{,}56} = 0{,}9 \pm \sqrt{0{,}81 - 0{,}56} = 0{,}9 \pm \sqrt{0{,}25} = 0{,}9 \pm 0{,}5$$

$x_1 = 0{,}9 - 0{,}5 = 0{,}4$ $\qquad x_2 = 0{,}9 + 0{,}5 = 1{,}4$

Somit weist der Funktionsgraph die folgenden drei Nullstellen auf:

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_2(0{,}4 \mid 0)$; $N_3(1{,}4 \mid 0)$

Der Funktionsterm lässt sich auch als Produkt von drei Linearfaktoren darstellen:

$$-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896 = -0{,}8 \cdot (x + 2) \cdot (x - 0{,}4) \cdot (x - 1{,}4)$$

Anmerkung zur 2. Übungsaufgabe: Anstatt durch den Linearfaktor (x + 2) hätten wir den Funktionsterm auch durch einen der beiden anderen Linearfaktoren (x – 0,4) oder (x – 1,8) teilen können. (Voraussetzung dafür ist natürlich erstmal, diese Nullstellen zu finden, beispielsweise durch Probieren). Um die Polynomdivision zu üben, teilen wir hier den Funktionsterm auch durch diese beiden anderen Linearfaktoren. Wenn wir alles richtig machen, darf wieder kein Rest übrig bleiben.

$$
\begin{array}{l}
(-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896) : (x - 0{,}4) = -0{,}8x^2 - 0{,}48x + 2{,}24 \\
-\underline{(-0{,}8x^3 + 0{,}32x^2)} \\
\qquad\qquad -0{,}48x^2 + 2{,}432x \\
\qquad\quad - \underline{(-0{,}48x^2 + 0{,}192x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2{,}24x - 0{,}896 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - \underline{(2{,}24x - 0{,}896)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Hinweis: $-0{,}8x^2 - 0{,}48x + 2{,}24 = -0{,}8 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1{,}4)$
Das ist uns aufgrund der Linearfaktordarstellung; auf der vorherigen Seite ganz unten; schon bekannt. Zur Übung könnten Sie es nachrechnen (Klammern auf der linken Seite auflösen).

$$
\begin{array}{l}
(-0{,}8x^3 - 0{,}16x^2 + 2{,}432x - 0{,}896) : (x - 1{,}4) = -0{,}8x^2 - 1{,}28x + 0{,}64 \\
-\underline{(-0{,}8x^3 + 1{,}12x^2)} \\
\qquad\qquad -1{,}28x^2 + 2{,}432x \\
\qquad\quad - \underline{(-1{,}28x^2 + 1{,}792x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}64x - 0{,}896 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - \underline{(0{,}64x - 0{,}896)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Hinweis: $-0{,}8x^2 - 1{,}28x + 0{,}64 = -0{,}8 \cdot (x + 2) \cdot (x - 0{,}4)$
Das ist uns aufgrund der Linearfaktordarstellung; auf der vorherigen Seite ganz unten; schon bekannt. Sie können es auch so ausrechnen:

$-0{,}8x^2 - 1{,}28x + 0{,}64 = 0 \mid : (-0{,}8)$

$x^2 + 1{,}6x - 0{,}8 = 0$ mit der pq-Formel lösen ; p = 1,6 ; q = – 0,8 $\quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$$x_{1/2} = -0{,}8 \pm \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}8} = -0{,}8 \pm \sqrt{0{,}64 + 0{,}8} = -0{,}8 \pm \sqrt{1{,}44} = -0{,}8 \pm 1{,}2$$

$x_1 = -0{,}8 - 1{,}2 = -2$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -0{,}8 + 1{,}2 = 0{,}4$