Ansgar Schiffler

Nullstellenbestimmung durch Substitution

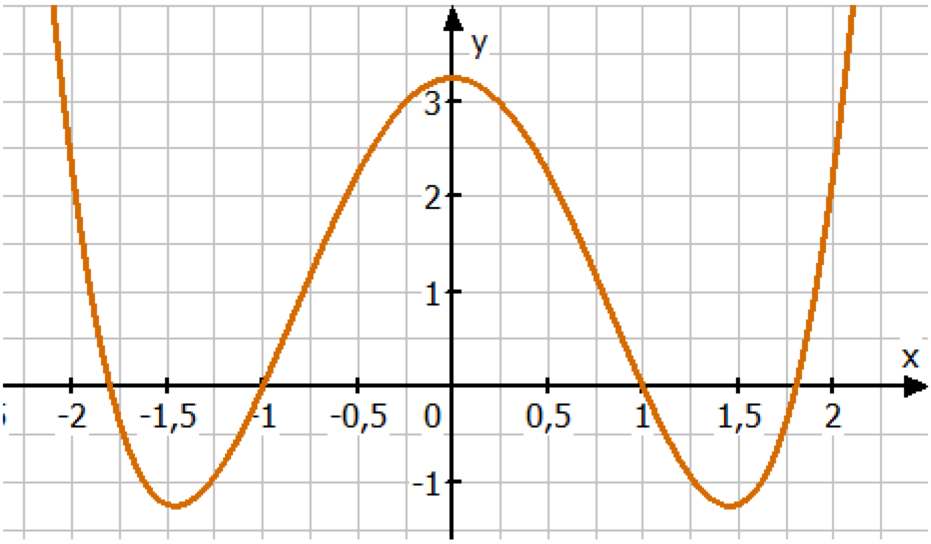
Dies ist die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades:

$$y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ mit } a \neq 0.$$

Wenn b= 0 und d = 0 gilt, dann ist der Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse und Sie können die Nullstellen des Funktionsgraphen recht einfach mit Hilfe des Substitutionsverfahrens bestimmen.

Beispiel: $y = f(x) = x^4 - 4{,}24x^2 + 3{,}24$

So sieht der zugehörige Funktionsgraph aus:



Es ist die folgende Gleichung zu lösen: $x^4 - 4{,}24x^2 + 3{,}24 = 0$

Wir ersetzen (substituieren) x^2 durch z und erhalten diese Gleichung: $z^2 - 4{,}24z + 3{,}24 = 0$

Diese Gleichung läßt sich zum Beispiel mit der pq-Formel lösen:

$$z_{1/2} = 2{,}12 \pm \sqrt{2{,}12^2 - 3{,}24} = 2{,}12 \pm \sqrt{4{,}4944 - 3{,}24} = 2{,}12 \pm \sqrt{1{,}2544} = 2{,}12 \pm 1{,}12$$

Wir erhalten diese beiden Lösungen: $z_1 = 2{,}12 + 1{,}12 = 3{,}24$

$z_2 = 2{,}12 - 1{,}12 = 1$

Jetzt erfolgt die Rücksubstituion. Es gilt ja $z = x^2$. Wir erhalten also die folgenden beiden Gleichungen:

$x^2 = 3{,}24$ $\qquad\qquad$ $x^2 = 1$

Wir lösen diese beiden Gleichungen nach x auf und erhalten:

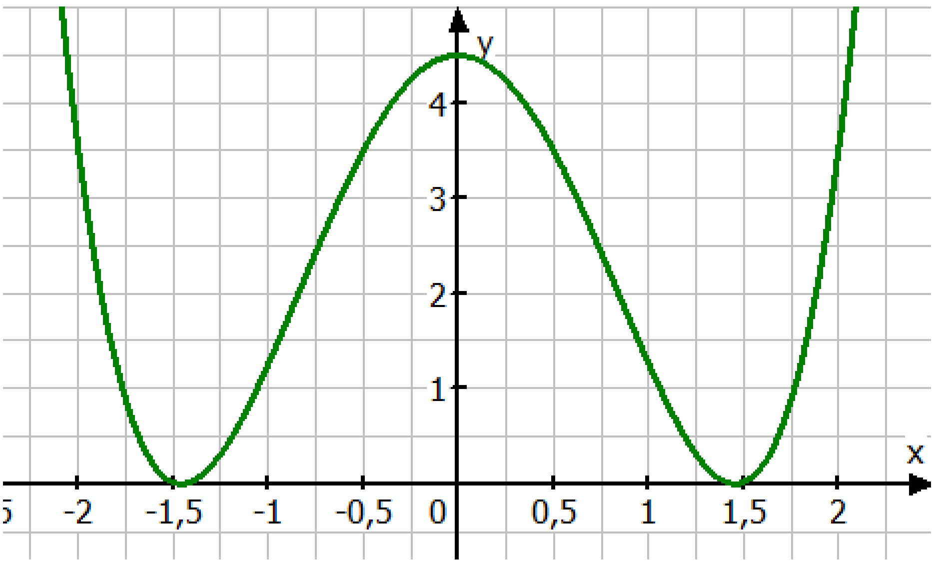
$x_{1/2} = \pm\sqrt{3{,}24} = \pm 1{,}8$ $\qquad\qquad$ $x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Dies sind somit die vier Nullstellen: $N_1(-1{,}8|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(1|0)$, $N_4(1{,}8|0)$

Weitere Übungsaufgaben:

1.) Bestimmen Sie die Nullstellen des Graphen der Funktion $\mathbf{y = f(x) = x^4 - 4{,}24x^2 + 4{,}4944}$

Hinweis: Diesen Graphen erhalten Sie, indem Sie den Graphen der Funktion $y = f(x) = x^4 - 4{,}24x^2 + 3{,}24$ (siehe erste Aufgabe) um 1,2544 Einheiten nach oben verschieben.



Es ist die folgende Gleichung zu lösen: $x^4 - 4{,}24x^2 + 4{,}4944 = 0$

Wir ersetzen (substituieren) x² durch z und erhalten diese Gleichung: $z^2 - 4{,}24z + 4{,}4944 = 0$

Diese Gleichung läßt sich zum Beispiel mit der pq-Formel lösen:

$$z_{1/2} = 2{,}12 \pm \sqrt{2{,}12^2 - 4{,}4944} = 2{,}12 \pm \sqrt{4{,}4944 - 4{,}4944} = 2{,}12 \pm \sqrt{0} = 2{,}12$$

$z_{1/2} = 2{,}12$

Wir haben jetzt nur noch eine Lösung.

Jetzt erfolgt die Rücksubstituion. Es gilt ja $z = x^2$. Wir erhalten also die folgende Gleichung:

$x^2 = 2{,}12$ Wir lösen diese Gleichung nach x auf und erhalten: $x_{1/2} = \pm\sqrt{2{,}12} \approx \pm 1{,}456$

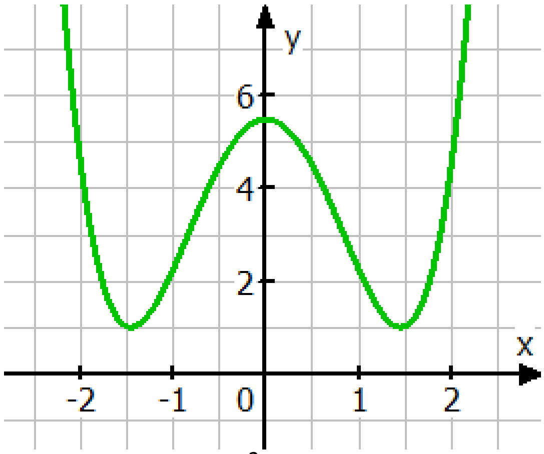
Dies sind die beiden Nullstellen **N_1(-1,456|0) , N_2(1,456|0)**

Nächstes Bespiel:

2.) Wie viele Nullstellen erhalten wir, wenn wir den Graphen noch weiter nach oben verschieben und die Funktionsgleichung nun so lautet?

$y = f(x) = x^4 - 4{,}24x^2 + 5{,}5$

Richtig! Dann hat der Graph keine Nullstellen mehr. (siehe Bild rechts). Auch das betrachten wir näher.



Es ist die folgende Gleichung zu lösen:
$x^4 - 4{,}24x^2 + 5{,}5 = 0$

Wir ersetzen (substituieren) x² durch z und erhalten diese Gleichung: $z^2 - 4{,}24z + 5{,}5 = 0$

Diese Gleichung läßt sich zum Beispiel mit der pq-Formel lösen:

$$z_{1/2} = 2{,}12 \pm \sqrt{2{,}12^2 - 5{,}5} = 2{,}12 \pm \sqrt{4{,}4944 - 5{,}5} = 2{,}12 \pm \sqrt{-1{,}0056}$$

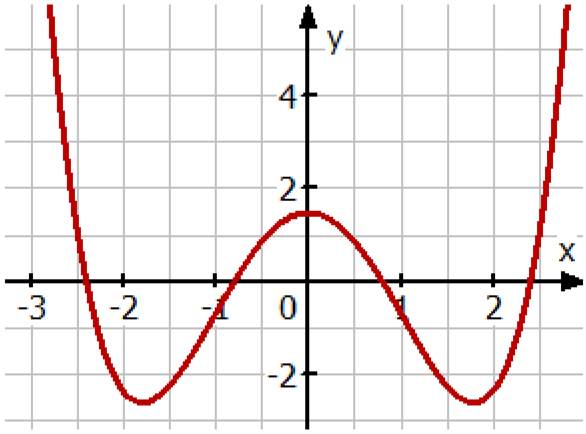
Aus einer negativen Zahl können Sie keine Wurzel ziehen. Die Gleichung ist nicht lösbar, der Graph der Funktion hat keine Nullstellen.

Letzte Übungsaufgabe:

3.) Bestimmen Sie die Nullstellen des Graphen der Funktion

$y = f(x) = 0{,}4x^4 – 2{,}56x^2 + 1{,}47456$

Rechts sehen Sie den Funktionsgraph.



Es ist die folgende Gleichung zu lösen:

$0{,}4x^4 – 2{,}56x^2 + 1{,}47456 = 0$

Wir ersetzen x^2 durch z und erhalten:

$0{,}4z^2 – 2{,}56z + 1{,}47456 = 0 \quad | : 0{,}4$

$z^2 – 6{,}4z + 3{,}6864 = 0$

Mit Hilfe der pq-Formel erhalten wir:

$$z_{1/2} = 3{,}2 \pm \sqrt{3{,}2^2 - 3{,}6864} = 3{,}2 \pm \sqrt{6{,}5536} = 3{,}2 \pm 2{,}56$$

$z_1 = 3{,}2 – 2{,}56 = 0{,}64$ $\qquad$ $z_2 = 3{,}2 + 2{,}56 = 5{,}76$

Jetzt erfolgt die Rücksubstituion. Es gilt ja $z = x^2$. Wir erhalten also die folgenden beiden Gleichungen: **$x^2 = 0{,}64$** $\qquad$ **$x^2 = 5{,}76$**

Wir lösen diese beiden Gleichungen nach x auf und erhalten:

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8 \qquad x_{3/4} = \pm\sqrt{5{,}76} = \pm 2{,}4$$

Dies sind somit die vier Nullstellen: $N_1(-2{,}4|0)$, $N_2(-0{,}8|0)$, $N_3(0{,}8|0)$, $N_4(2{,}4|0)$