

Übungsaufgaben zur Zinsrechnung

- a.) Jemand legt heute 4.000.- € zu 4,8% Zinsen an. Nach wie vielen Jahren wird sein Guthaben auf 5.056,69 € angewachsen sein?
- b.) Jemand legt 7.000.- € an. Nach 4 Jahren ist das Guthaben bei konstantem Zinssatz auf 8.094,93 € angewachsen. Bestimmen Sie den Zinssatz!
- c.) Jemand zahlt dreimal 2.800.- € auf sein Konto ein: sofort, nach einem Jahr und nach zwei Jahren. Unmittelbar nach der letzten Einzahlung hat er insgesamt (mit Zinseszins) 340,48 € Zinsen erhalten. Berechnen Sie den Zinssatz.
- d.) Jemand zahlt dreimal den gleichen Geldbetrag B auf sein Konto ein: sofort, nach zwei Jahr und nach sechs Jahren. Unmittelbar nach der letzten Einzahlung beläuft sich sein Kontostand auf 9.785,38 €. Bestimmen Sie B, wenn der Zinssatz 4,5% beträgt. Wie viele Zinsen hat er insgesamt (incl. Zinseszins erhalten) ?
- e.) Jemand zahlt sofort 2.500.- € ein und später zahlt er weitere 3.550.- € ein. Der Zinssatz beträgt 5%. Nach insgesamt 9 Jahren beläuft sich sein Guthaben auf 8.635,66 €. Wann wurden die 3.550.- € eingezahlt?
- f.) Jemand zahlt 1.800.- € ein. Der Zinssatz beträgt 3%. Nach vier Jahren wird der Zinssatz erhöht. Zum gleichen Zeitpunkt zahlt er 2.200.- € ein. Nach insgesamt neun Jahren beträgt sein Guthaben 5.241,11 €. Um wie viele Prozentpunkte wurde der Zinssatz erhöht? Wie viele Zinsen hat er insgesamt erhalten?
- g.) Ein Guthaben in Höhe von 2.800.- € wird mit 7% verzinst, ein zweites Guthaben in Höhe von 3.710,44.- € wird mit 3,3% verzinst. Nach wie vielen Jahren sind beide Guthaben auf den gleichen Betrag angewachsen?
- h.) Ein Kapital in Höhe von 5.000.- € wird zwei Jahre lang verzinst und beträgt dann 5.512 €. Nach dem ersten Jahr wird der Zinssatz um zwei Prozentpunkte erhöht. Bestimmen Sie den Zinssatz im ersten Jahr.
- i.) Ein Kapital in Höhe von 5.500.- € wird zwei Jahre lang verzinst und beträgt dann 5994,56 €. Nach dem ersten Jahr steigt der Zinssatz um ein Fünftel an. Bestimmen Sie den Zinssatz im ersten Jahr.
- j.) Jemand zahlt dreimal Geld auf sein Konto ein: Ganz am Anfang den Betrag B, drei Jahre später das Doppelte des Betrags B und weitere fünf Jahre später 60% des Betrags B. Der Zinssatz beträgt am Anfang 6% und verringert sich zwei Jahre nach der zweiten Einzahlung auf 3%. Unmittelbar nach der letzten Einzahlung beläuft sich der Kontostand auf 7.861,13 €. Bestimmen Sie B.

a.) Jemand legt heute 4.000.- € zu 4,8% Zinsen an. Nach wie vielen Jahren wird sein Guthaben auf 5.056,69 € angewachsen sein?

Lösung:

$$4.000 \cdot 1,048^x = 5.056,69 \quad | : 4.000 \quad 1,048^x = 1,2641725 \quad | \lg$$

$x = \lg 1,2641725 / \lg 1,048 = 5$ Es dauert **5 Jahre** bis das Guthaben auf 5.056,69 € angewachsen ist.

b.) Jemand legt 7.000.- € an. Nach 4 Jahren ist das Guthaben bei konstantem Zinssatz auf 8.094,93 € angewachsen. Bestimmen Sie den Zinssatz!

Lösung:

$$7.000 \cdot x^4 = 8.094,93 \quad | : 7.000 \quad x^4 = 1,15642 \quad | \sqrt[4]{\quad} \quad x = 1,037$$

Der Zinssatz beträgt ca. **3,7%**

c.) Jemand zahlt dreimal 2.800.- € auf sein Konto ein: sofort, nach einem Jahr und nach zwei Jahren. Unmittelbar nach der letzten Einzahlung hat er insgesamt (mit Zinseszins) 340,48 € Zinsen erhalten. Berechnen Sie den Zinssatz.

Hinweis: x ist der Aufzinsfaktor. Z.B. entspricht $x = 1,05$ einem Zinssatz in Höhe von 5%. Es gilt: $x = 1 + p/100$

Lösung:

Er hat dreimal 2.800 € eingezahlt. $2.800 \text{ €} \cdot 3 = 8.400 \text{ €}$. Wenn wir hierzu alle erhaltenen Zinsen hinzuaddieren, erhalten wir den Kontostand. $8.400 \text{ €} + 340,48 \text{ €} = 8.740,48 \text{ €}$.

Der Kontostand unmittelbar nach der letzten Einzahlung beträgt somit 8.740,48 €.

$$2.800 \cdot x^2 + 2.800 \cdot x + 2.800 = 8.740,48 \quad | - 8.740,48$$

$$2.800 \cdot x^2 + 2.800 \cdot x - 5.940,48 = 0 \quad | : 2.800$$

$$x^2 + x - 2,1216 = 0 \quad x_{1/2} = -0,5 \pm \sqrt{0,5^2 + 2,1216} = -0,5 \pm \sqrt{2,3716} = -0,5 \pm 1,54$$

$x_1 = -0,5 - 1,54 = -2,04 < 0$. Kommt als Lösung nicht in Frage, da $x < 0$.

$x_2 = -0,5 + 1,54 = 1,04$. Also ist $p = 4$.

Der Zinssatz beträgt **4 %**.

d.) Jemand zahlt dreimal den gleichen Geldbetrag B auf sein Konto ein: sofort, nach zwei Jahr und nach sechs Jahren. Unmittelbar nach der letzten Einzahlung beläuft sich sein Kontostand auf 9.785,38 €. Bestimmen Sie B, wenn der Zinssatz 4,5% beträgt. Wie viele Zinsen hat er insgesamt (incl. Zinseszins erhalten) ?

Lösung:

Der sofort eingezahlte Betrag wurde sechs Jahre lang verzinst, der nach zwei Jahren eingezahlte Betrag wurde vier Jahre lang verzinst, der nach sechs Jahren eingezahlte Betrag wurde nicht verzinst.

$$B \cdot 1,045^6 + B \cdot 1,045^4 + B = 9.785,38$$

$$B \cdot (1,045^6 + 1,045^4 + 1) = 9.785,38 \quad | \quad /$$

$$B \cdot 3,494779 = 9.785,38 \quad | \quad : 3,494779$$

$$B \approx 2.800$$

Es wurden drei mal 2.800 € eingezahlt.

Die Höhe des Betrags beläuft sich auf 2.800.- €. $2.800 \text{ €} \cdot 3 = 8.400 \text{ €}$. Dies sind insgesamt 8.400 €. Der Kontostand nach sechs Jahren beläuft sich auf 9.785,38 €. Die Differenz sind die Zinsen (incl. aller Zinseszinsen). $9.785,38 \text{ €} - 8.400 \text{ €} = 1.385,38 \text{ €}$.

Er hat insgesamt 1.385,38 € Zinsen erhalten.

Hinweis: Zur Probe können Sie auch berechnen, wie sich die Zinsen auf die drei Einzahlungsbeträge verteilen.

Die erste Einzahlung in Höhe von 2.800 € wurde sechs Jahre lang verzinst.

Die zweite Einzahlung in Höhe von 2.800 € wurde vier Jahre lang verzinst.

Die dritte Einzahlung in Höhe von 2.800 € wurde nicht verzinst.

$$2.800 \cdot 1,045^6 = 3.646,33 \quad 3.646,33 - 2.800 = 846,33$$

$$2.800 \cdot 1,045^4 = 3.339,05 \quad 3.339,05 - 2.800 = 539,05$$

$846,33 \text{ €} + 539,05 \text{ €} + 0,00 \text{ €} = 1.385,38 \text{ €}$. Dies stimmt mit unserem Ergebnis überein.

e.) Jemand zahlt sofort 2.500.- € ein und später zahlt er weitere 3.550.- € ein. Der Zinssatz beträgt 5%. Nach insgesamt 9 Jahren beläuft sich sein Guthaben auf 8.635,66 €. Wann wurden die 3.550.- € eingezahlt?

Lösung:

Die 3.550 € werden nach n Jahren eingezahlt. Also werden sie 9 – n Jahre lang verzinst.

$$2.500 \cdot 1,05^9 + 3.550 \cdot 1,05^{9-n} = 8.635,66 \quad | - 2.500 \cdot 1,05^9$$

$$3.550 \cdot 1,05^{9-n} = 4.757,34 \quad | : 3.550$$

$$1,05^{9-n} = 1,3400956 \quad | \log \quad 9 - n = \log_{1,05}(1,3401) = 6$$

$$9 - n = 6 \quad | + n \quad - 6 \quad n = 3$$

Die 3.550.- € wurde nach **drei Jahren** eingezahlt (und somit 6 Jahre lang verzinst).

f.) Jemand zahlt 1.800.- € ein. Der Zinssatz beträgt 3%. Nach vier Jahren wird der Zinssatz erhöht. Zum gleichen Zeitpunkt zahlt er 2.200.- € ein. Nach insgesamt neun Jahren beträgt sein Guthaben 5.241,11 €. Um wie viele Prozentpunkte wurde der Zinssatz erhöht? Wie viele Zinsen hat er insgesamt erhalten?

Lösung:

$$(1.800 \cdot 1,03^4 + 2.200) \cdot x^5 = 5.241,11 \quad | \cdot$$

$$4.225,916 \cdot x^5 = 5.241,11 \quad | : 4.225,916$$

$$x^5 = 1,24023 \quad | \sqrt[5]{\quad} \quad x = \sqrt[5]{1,24023} = 1,044 \quad \text{Der neue Zinssatz beträgt } 4,4\%$$

4,4 - 3,0 = 1,4. Der Zinssatz hat sich **um 1,4 Prozentpunkte** auf **4,4%** erhöht.

$$1.800 + 2.200 = 4.000$$

$$5.241,11 - 4.000 = 1.241,11$$

Er hat insgesamt 4.000 € eingezahlt und sein Kontostand beläuft sich auf 5.241,11 €. Die Differenz sind die Zinsen.

Er hat insgesamt **1.241,11 €** Zinsen erhalten.

g.) Ein Guthaben in Höhe von 2.800.- € wird mit 7% verzinst, ein zweites Guthaben in Höhe von 3.710,44.- € wird mit 3,3% verzinst. Nach wie vielen Jahren sind beide Guthaben auf den gleichen Betrag angewachsen?

Lösung:

$$2.800 \cdot 1,07^x = 3.710,44 \cdot 1,033^x \quad | : 2.800 \quad | : 1,033^x$$

$$\frac{1,07^x}{1,033^x} = \frac{3.710,44}{2.800} \quad | \top$$

$$\left(\frac{1,07}{1,033}\right)^x = 1,325157 \quad | \top$$

$$1,035818^x = 1,325157 \quad | \log$$

$$x = \log_{1,035818} (1,325157) = 8$$

Nach acht Jahren sind beide Guthaben auf den gleichen Betrag angewachsen.

$$\text{Probe:} \quad 2.800 \cdot 1,07^8 = 4.810,92 \quad 3.710,44 \cdot 1,033^8 = 4.810,92$$

h.) Ein Kapital in Höhe von 5.000.- € wird zwei Jahre lang verzinst und beträgt dann 5.512 €. Nach dem ersten Jahr wird der Zinssatz um zwei Prozentpunkte erhöht. Bestimmen Sie den Zinssatz im ersten Jahr.

Hinweis: x ist der Aufzinsfaktor. Z.B. entspricht $x = 1,05$ ein Zinssatz in Höhe von 5%. Es gilt: $x = 1 + p/100$

Lösung:

$$5.000 \cdot x \cdot (x + 0,02) = 5.512 \quad | - 5.512$$

$$5.000x^2 + 100x - 5.512 = 0 \quad | : 5000$$

$$x^2 + 0,02x - 1,1024 = 0$$

$$x_{1/2} = -0,01 \pm \sqrt{0,01^2 + 1,1024} = -0,01 \pm \sqrt{1,1025} = -0,01 \pm 1,05$$

$$x_1 = -0,01 - 1,05 = -1,06 < 0. \quad \text{Kommt als Lösung nicht in Frage, da } x < 0.$$

$$x_2 = -0,01 + 1,05 = 1,04.$$

Der anfängliche Zinssatz beträgt 4% und erhöht sich dann um zwei Prozentpunkte auf 6%.

i.) Ein Kapital in Höhe von 5.500.- € wird zwei Jahre lang verzinst und beträgt dann 5994,56 €. Nach dem ersten Jahr steigt der Zinssatz um ein Fünftel an. Bestimmen Sie den Zinssatz im ersten Jahr.

Erster Lösungsweg:

$$5.500 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{1,2 \cdot p}{100}\right) = 5.994,56 \quad | : 5.500$$

$$1 + \frac{1,2 \cdot p}{100} + \frac{p}{100} + \frac{1,2 \cdot p^2}{10.000} = 1,08992 \quad | - 1,08992$$

$$\frac{2,2 \cdot p}{100} + \frac{1,2 \cdot p^2}{10.000} - 0,08992 = 0 \quad | \cdot 10.000$$

$$1,2p^2 + 220p - 899,2 = 0 \quad | : 1,2$$

$$p^2 + 183,3\bar{3}p - 749,3\bar{3} = 0$$

$$p_{1/2} = -91,6\bar{6} \pm \sqrt{91,6\bar{6}^2 + 749,3\bar{3}} = -91,6\bar{6} \pm 95,6\bar{6}$$

$$p_1 = -91,6\bar{6} - 95,6\bar{6} = -187,3\bar{3} < 0 \quad \text{keine Lösung}$$

$$p_2 = -91,6\bar{6} + 95,6\bar{6} = 4$$

Zweiter Lösungsweg:

$$5.500 \cdot x \cdot (1 + (x - 1) \cdot 1,2) = 5.994,56 \quad | : 5.500$$

$$x + x \cdot (x - 1) \cdot 1,2 = 1,08992 \quad | - 1,08992$$

$$x + 1,2x^2 - 1,2x - 1,08992 = 0 \quad | \text{T}$$

$$1,2x^2 - 0,2x - 1,08992 = 0 \quad | : 1,2$$

$$x^2 - 0,1\bar{6}x - 0,9082\bar{6} = 0$$

$$x_{1/2} = 0,08\bar{3} \pm \sqrt{0,08\bar{3}^2 + 0,9082\bar{6}}$$

$$x_{1/2} = 0,08\bar{3} \pm \sqrt{0,9152\bar{1}} = 0,08\bar{3} \pm 0,95\bar{6}$$

$$x_1 = 0,08\bar{3} - 0,95\bar{6} = -0,87\bar{3} \quad \text{keine Lösung}$$

$$x_2 = 0,08\bar{3} + 0,95\bar{6} = 1,04$$

Der Zinssatz beträgt zunächst 4% und steigt dann um eine Fünftel auf 4,8% an.

j.) Jemand zahlt dreimal Geld auf sein Konto ein: Ganz am Anfang den Betrag B, drei Jahre später das Doppelte des Betrags B und weitere fünf Jahre später 60% des Betrags B. Der Zinssatz beträgt am Anfang 6% und verringert sich zwei Jahre nach der zweiten Einzahlung auf 3%. Unmittelbar nach der letzten Einzahlung beläuft sich der Kontostand auf 7.861,13 €. Bestimmen Sie B.

Lösung:

$$(B \cdot 1,06^3 + 2B) \cdot 1,06^2 \cdot 1,03^3 + 0,6 \cdot B = 7.861,13 \quad | \text{T}$$

$$B \cdot 1,06^5 \cdot 1,03^3 + 2 \cdot B \cdot 1,06^2 \cdot 1,03^3 + 0,6 \cdot B = 7.861,13 \quad | \text{T}$$

$$B \cdot (1,06^5 \cdot 1,03^3 + 2 \cdot 1,06^2 \cdot 1,03^3 + 0,6) = 7.861,13 \quad | : ()$$

$$B = 1.740,00$$

Am Anfang wurden 1.740 € eingezahlt, nach drei Jahren 3.480 € (das Doppelte) und nach acht Jahren wurden 1.044 € eingezahlt (60% von 1.740 €).

Übungsaufgaben zur Zinsrechnung

- k.)** Ein Kapital in Höhe von 2.920 € wird zunächst vier Jahre lang mit 3% verzinst und dann steigt der Zinssatz auf 4,5% an. Wie viele Jahre dauert es insgesamt, bis das Kapital auf 4.095,56 € angewachsen ist?
- l.)** Mit wie viel Prozent muss ein Kapital verzinst werden, damit es sich innerhalb von **a.)** sieben **b.)** zehn **c.)** zwanzig Jahren verdoppelt? Gib dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.
- m.)** Kapital A beträgt 4.000.- € und wird mit 2% verzinst. Kapital B beträgt 2.000 € und wird mit 4% verzinst. **a.)** Vergleiche die Zinsen auf Kapital A und B nach 8 Jahren in Prozent (zwei Antwortsätze!)
Kapital C wird mit 8% verzinst. **b.)** Wie groß muss dieses Kapital sein, damit es nach 8 Jahren genauso viele Zinsen abwirft wie Kapital A? Lösung: 806,93 €
c.) Nach wie vielen Jahren ist Kapital A nur noch doppelt so groß wie Kapital C? Wie groß sind dann Kapital A und Kapital C?
- n.)** Jemand zahlt den Betrag B auf sein Konto ein. Der Zinssatz beträgt zunächst 4% und steigt nach drei Jahren auf 6% an. Ein Jahr nach der Zinserhöhung zahlt er die Hälfte des Betrags B ein. Nach weiteren zwei Jahren ist sein Kapital auf 1.787,44 € angewachsen. Wie hoch sind die beiden eingezahlten Beträge?
- o.)** Jemand zahlt am Anfang 1000.- € ein, nach einem Jahr 1300.- € und nach zwei Jahren 1.600.- €. Unmittelbar nach der dritten Einzahlung beläuft sich sein Kapital auf 4.170,40 €. **a.)** Bestimme den Zinssatz. **b.)** Wie viele Zinsen hat er insgesamt erhalten?
- p.)** Person A zahlt 1.070.- € ein, die mit 3% verzinst werden. Person B zahlt vier Jahre später 836,73 € ein, die mit 8,5% verzinst werden. Nach wie vielen Jahren haben beide Personen das gleiche Kapital angespart? Wie hoch ist dieses Kapital?
- q.)** Ein Kapital in Höhe von 2.000.- € wird verzinst. Nach einem Jahr werden weitere 2.800.- € eingezahlt und gleichzeitig steigt der Zinssatz um 1,8 Prozentpunkte an. Nach einem weiteren Jahr ist das Kapital auf 5.177,04 € angewachsen. Bestimme den im ersten Jahr gültigen Zinssatz.

k.) Ein Kapital in Höhe von 2.920 € wird zunächst vier Jahre lang mit 3% verzinst und dann steigt der Zinssatz auf 4,5% an. Wie viele Jahre dauert es insgesamt, bis das Kapital auf 4.095,56 € angewachsen ist?

Lösung: $2.920 \cdot 1,03^4 \cdot 1,045^n = 4.095,56 \quad | : (2.920 \cdot 1,03^4)$

$$1,045^n = 1,24618 \quad | \log \quad n = \log_{1,045} 1,24618 \approx 5 \quad 4 + 5 = 9$$

Nach insgesamt **9 Jahren** ist dieses Kapital auf **4.095,56 €** angewachsen.

l.) Mit wie viel Prozent muss ein Kapital verzinst werden, damit es sich innerhalb von **a.)** sieben **b.)** zehn **c.)** zwanzig Jahren verdoppelt? Gib dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

Lösung:

a.) $B \cdot x^7 = 2 \cdot B \quad | : B \quad | \sqrt[7]{\quad} \quad x \approx 1,1040895 \quad \text{Der Zinssatz muss ca. } \mathbf{10,41\%}$ betragen.

b.) $x^{10} = 2 \quad | \sqrt[10]{\quad} \quad x \approx 1,07177 \quad \text{Der Zinssatz muss ca. } \mathbf{7,18\%}$ betragen.

c.) $x^{20} = 2 \quad | \sqrt[20]{\quad} \quad x \approx 1,03526 \quad \text{Der Zinssatz muss ca. } \mathbf{3,53\%}$ betragen.

m.) Kapital A beträgt 4.000.- € und wird mit 2% verzinst. Kapital B beträgt 2.000 € und wird mit 4% verzinst. **a.)** Vergleiche die Zinsen auf Kapital A und B nach 8 Jahren in Prozent (zwei Antwortsätze!)

Kapital C wird mit 8% verzinst. **b.)** Wie groß muss dieses Kapital sein, damit es nach 8 Jahren genauso viele Zinsen abwirft wie Kapital A? Lösung: 806,93 €

c.) Nach wie vielen Jahren ist Kapital A nur noch doppelt so groß wie Kapital C? Wie groß sind dann Kapital A und Kapital C?

Lösung:

a.) $4.000 \cdot 1,02^8 = 4.686,64 \quad 4.686,64 - 4.000 = 686,64$

$$2.000 \cdot 1,04^8 = 2.737,14 \quad 2.737,14 - 2.000 = 737,14$$

$$737,14 - 686,64 = 50,50$$

$$50,50 / 686,64 \cdot 100\% \approx 7,35\% \quad 50,50 / 737,14 \cdot 100\% \approx 6,85\%$$

Die Zinsen für Kapital B sind um **7,35% höher** als die für Kapital A.
Die Zinsen für Kapital A sind um **6,85% geringer** als die für Kapital B.

$$\text{b.) } K_c \cdot 1,08^8 = K_c + 686,64 \quad | - K_c \quad | \quad T \quad K_c \cdot (1,08^8 - 1) = 686,64 \quad | : ()$$

$K_c = 806,93$ **Kapital C muss 806,93 € betragen.**

$$\text{b.) } 2 \cdot 806,93 \cdot 1,08^x = 4.000 \cdot 1,02^x \quad | : (2 \cdot 806,93) \quad | : 1,02^x$$

$$1,05882^x = 2,47853 \quad | \log \quad x = \log_{1,05882} 2,47853 = 15,88$$

$$4.000 \cdot 1,02^{15,88} = 5.478,09 \quad 806,93 \cdot 1,08^{15,88} = 2.739,045$$

Nach ca. 15,88 Jahren ist Kapital A nur noch doppelt so groß wie Kapital C. Dann beträgt Kapital A ca. 5.478,09 € und Kapital C ca. 2.739,05 €.

n.) Jemand zahlt den Betrag B auf sein Konto ein. Der Zinssatz beträgt zunächst 4% und steigt nach drei Jahren auf 6% an. Ein Jahr nach der Zinserhöhung zahlt er die Hälfte des Betrags B ein. Nach weiteren zwei Jahren ist sein Kapital auf 1.787,44 € angewachsen. Wie hoch sind die beiden eingezahlten Beträge?

Lösung:

$$(B \cdot 1,04^3 \cdot 1,06 + 0,5 \cdot B) \cdot 1,06^2 = 1,787,44$$

$$B \cdot 1,04^3 \cdot 1,06^3 + 0,5 \cdot B \cdot 1,06^2 = 1,787,44 \quad | \quad T$$

$$B \cdot (1,04^3 \cdot 1,06^3 + 0,5 \cdot 1,06^2) = 1,787,44 \quad | : ()$$

$$B \approx 940 \quad 0,5 \cdot 940 = 470.$$

Er zahlte zunächst 940 € ein und vier Jahre später zahlte er 470 € ein.

o.) Jemand zahlt am Anfang 1000.- € ein, nach einem Jahr 1300.- € und nach zwei Jahren 1.600.- €. Unmittelbar nach der dritten Einzahlung beläuft sich sein Kapital auf 4.170,40 €. **a.)** Bestimme den Zinssatz. **b.)** Wie viele Zinsen hat er insgesamt erhalten?

$$\text{Lösung: a.) } 1.000 \cdot x^2 + 1.300 \cdot x + 1.600 = 4.170,40 \quad | - 4.170,40 \quad | : 1.000$$

$$x^2 + 1,3 \cdot x - 2,5704 = 0 \quad x_{1/2} = -0,65 \pm \sqrt{0,65^2 + 2,5704} = -0,65 \pm \sqrt{2,9929} = -0,65 \pm 1,73$$

$$x_1 = -0,65 - 1,73 = -2,38 \quad \text{kommt als Lösung nicht in Frage.}$$

$$x_2 = -0,65 + 1,73 = 1,08 \quad \text{Der Zinssatz beträgt 8\%.}$$

$$\text{b.) } 1.000 + 1.300 + 1.600 = 3.900 \quad 4.170,40 - 3.900 = 270,40$$

Er hat insgesamt 270,40 € Zinsen erhalten.

p.) Person A zahlt 1.070.- € ein, die mit 3% verzinst werden. Person B zahlt vier Jahre später 836,73 € ein, die mit 8,5% verzinst werden. Nach wie vielen Jahren haben beide Personen das gleiche Kapital angespart? Wie hoch ist dieses Kapital?

Lösung:

$$1.070 \cdot 1,03^4 \cdot 1,03^n = 836,73 \cdot 1,085^n \quad | \cdot T$$

$$1.204,29 \cdot 1,03^n = 836,73 \cdot 1,085^n \quad | : 836,73 \quad | : 1,03^n$$

$$1,4392868 = 1,053398^n \quad | \log \quad n = \log_{1,053398} 1,4392868 \approx 7 \quad 7 + 4 = 11$$

$$1.070 \cdot 1,03^{11} \approx 1.481,13 \quad 836,73 \cdot 1,085^7 \approx 1.481,13$$

Nach 11 Jahren haben beide 1.481,13 €.

q.) Ein Kapital in Höhe von 2.000.- € wird verzinst. Nach einem Jahr werden weitere 2.800.- € eingezahlt und gleichzeitig steigt der Zinssatz um 1,8 Prozentpunkte an. Nach einem weiteren Jahr ist das Kapital auf 5.177,04 € angewachsen. Bestimme den im ersten Jahr gültigen Zinssatz.

Lösung:

$$(2.000 \cdot x + 2.800) \cdot (x + 0,018) = 5.177,04 \quad | \cdot T$$

Hinweis: x steht für den Aufzinsfaktor. Z. B. entsprechen 4% Zinsen dem Aufzinsfaktor 1,04.

$$2.000 \cdot x^2 + 36x + 2.800x + 50,4 = 5.177,04 \quad | - 5.177,04$$

$$2.000 \cdot x^2 + 2.836x - 5.126,64 = 0 \quad | : 2.000$$

$$x^2 + 1,418x - 2,56322 = 0$$

$$x_{1/2} = -0,709 \pm \sqrt{0,709^2 + 2,56322} = -0,709 \pm \sqrt{3,066001} = -0,709 \pm 1,751$$

$$x_1 = -0,709 - 1,751 = -2,46 \quad \text{kommt als Lösung nicht in Frage.}$$

$$x_2 = -0,709 + 1,751 = 1,042$$

Im ersten Jahr war der Zinssatz 4,2% und im zweiten Jahr 6%.

Übungsaufgaben zur Zinsrechnung

- r.)** Frau Centozzi legt 2.800 € an, die mit 2,8% verzinst werden. Nach vier Jahren hebt sie den Betrag B ab. Ein Jahr später steigt der Zinssatz auf 4% an. Weitere zwei Jahre später hebt sie erneut den Betrag B ab. Unmittelbar nach dieser zweiten Abhebung ist ihr Kontostand 2.843,32 €. Bestimme den Betrag B.
- s.)** Es werden 7.500 € zwei Jahre lang verzinst und wachsen auf 8.002,26 € an. Der Zinssatz wird nach einem Jahr halbiert. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?
- t.)** Ein Kapital wird zehn Jahre lang mit 2% verzinst. Bei welchem Zinssatz wären die Zinsen **a.)** doppelt so hoch **b.)** vierfach so hoch?
- u.)** Es werden 5.000 € zwei Jahre lang verzinst. Der Zinssatz sink nach einem Jahr um 2,8 Prozentpunkte. Die Zinsen betragen insgesamt 282,94 €. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?
- v.)** Svenja zahlt 2.400 € ein. Der Zinssatz ist 2,5 %. Nach vier Jahren zahlt sie 1.200 € ein und der Zinssatz steigt an. Dieser neue Zinssatz ist drei Jahre lang gültig. Dann zahlt sie 1.500 € und der Zinssatz sinkt auf 3,3 %. Nach weiteren drei Jahren beträgt der Kontostand 6.412,42 €.
- a.)** Bestimmen Sie den zweiten Zinssatz. **b.)** Wie viele Zinsen hat sie erhalten?
- w.)** Bettina zahlt 3.000 € ein. Der Zinssatz ist 2,4 %. Nach fünf Jahren zahlt sie 1.000 € ein. Ein Jahr später steigt der Zinssatz auf 4 % an. Wie viele Jahre dauert es insgesamt, bis ihr Guthaben auf 5.244,20 € angewachsen ist?
- x.)** Du legst 7.000 € zu einem Zinssatz von 3,2% an. Am Ende jeden Jahres erhältst du deine Zinsen. Wann werden diese Zinsen erstmals mehr als 300 € betragen und wie hoch werden diese Zinsen sein?
- y.)** Herr Bechtold zahlt 800 € und ein Jahr später weitere 1.200 € auf sein Konto ein. Der Zinssatz beträgt 3,5%. **a.)** Wie viele Zinsen hat er nach 2 Jahren erhalten?
b.) Er erhält in den zwei Jahren 120,16 € Zinsen. Der Zinssatz steigt nach einem Jahr um 2,6 Prozentpunkte an. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?

r.) Frau Centozzi legt 2.800 € an, die mit 2,8% verzinst werden. Nach vier Jahren hebt sie den Betrag B ab. Ein Jahr später steigt der Zinssatz auf 4% an. Weitere zwei Jahre später hebt sie erneut den Betrag B ab. Unmittelbar nach dieser zweiten Abhebung ist ihr Kontostand 2.843,32 €. Bestimme den Betrag B.

Lösung:

$$(2.800 \cdot 1,028^4 - B) \cdot 1,028 \cdot 1,04^2 - B = 2.843,32 \quad | \quad T$$

$$2.800 \cdot 1,028^5 \cdot 1,04^2 - B \cdot 1,028 \cdot 1,04^2 - B = 2.843,32 \quad | \quad - 2.800 \cdot 1,028^5 \cdot 1,04^2$$

$$- B \cdot 1,028 \cdot 1,04^2 - B = - 633,565 \quad | \quad \cdot (-1) \quad | \quad T$$

$$B \cdot (1,028 \cdot 1,04^2 + 1) = 633,565 \quad | \quad : ()$$

B = 300 **Sie hat jeweils 300 € abgehoben.**

s.) Es werden 7.500 € zwei Jahre lang verzinst und wachsen auf 8.002,26 € an. Der Zinssatz wird nach einem Jahr halbiert. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?

Erster Lösungsweg:

$$7.500 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{0,5 \cdot p}{100}\right) = 8.002,26 \quad | \quad : 7.500$$

$$1 + \frac{0,5 \cdot p}{100} + \frac{p}{100} + \frac{0,5 \cdot p^2}{10.000} = 1,066968 \quad | \quad - 1,066968$$

$$\frac{1,5 \cdot p}{100} + \frac{0,5 \cdot p^2}{10.000} - 0,066968 = 0 \quad | \quad \cdot 10.000$$

$$0,5p^2 + 150p - 669,68 = 0 \quad | \quad : 0,5$$

$$p^2 + 300p - 1.339,36 = 0$$

$$p_{1/2} = -150 \pm \sqrt{150^2 + 1.339,36} = -150 \pm 154,4$$

$$p_1 = -150 - 154,4 = -304,4 \quad \text{keine Lösung}$$

$$p_2 = -150 + 154,4 = 4,4$$

Zweiter Lösungsweg:

$$7.500 \cdot x \cdot (1 + (x - 1) \cdot 0,5) = 8.002,26 \quad | \quad : 7.500$$

$$x + x \cdot (x - 1) \cdot 0,5 = 1,066968 \quad | \quad - 1,066968$$

$$x + 0,5x^2 - 0,5x - 1,066968 = 0 \quad | \quad T$$

$$0,5x^2 + 0,5x - 1,066968 = 0 \quad | \quad : 0,5$$

$$x^2 + x - 2,13396 = 0$$

$$x_{1/2} = -0,5 \pm \sqrt{0,5^2 + 2,13396}$$

$$x_{1/2} = -0,5 \pm \sqrt{2,383936} = -0,5 \pm 1,544$$

$$x_1 = -0,5 - 1,544 = -2,044 \quad \text{keine Lösung}$$

$$x_2 = -0,5 + 1,544 = 1,044$$

Der Zinssatz beträgt zunächst **4,4%** und im zweiten Jahr **2,2%**.

t.) Ein Kapital wird zehn Jahre lang mit 2% verzinst. Bei welchem Zinssatz wären die Zinsen a.) doppelt so hoch b.) vierfach so hoch?

Lösung:

$$1.000 \cdot 1,02^{10} = 1.218,9944 \quad 1.218,9944 - 1.000 = 218,9944$$

$$\text{a.) } 1000 + 218,9944 \cdot 2 = 1.437,9888 \quad 1.000 \cdot x^{10} = 1.437,9888 \quad | : 1000 \quad | \sqrt[10]{}$$

$x \approx 1,03699$ **Der Zinssatz müsste ca. 3,70 % betragen.**

$$\text{b.) } 1000 + 218,9944 \cdot 4 = 1.875,9777 \quad 1.000 \cdot x^{10} = 1.875,9777 \quad | : 1000 \quad | \sqrt[10]{}$$

$x \approx 1,06493$ **Der Zinssatz müsste ca. 6,49 % betragen.**

u.) Es werden 5.000 € zwei Jahre lang verzinst. Der Zinssatz sinkt nach einem Jahr um 2,8 Prozentpunkte. Die Zinsen betragen insgesamt 282,94 €. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?

Lösung:

$$5.000 \cdot x \cdot (x - 0,028) = 5.000 + 282,93 \quad | : 5.000$$

$$x^2 - 0,028x = 1,056588 \quad | - 1,056588$$

$$x^2 - 0,028x - 1,056588 = 0$$

$$x_{1/2} = 0,014 \pm \sqrt{0,014^2 + 1,056588} = 0,014 \pm \sqrt{1,056784} = 0,014 \pm 1,028$$

$x_1 = 0,014 - 1,028 = -1,014 < 0$. Kommt als Lösung nicht in Frage, da $x < 0$.

$x_2 = 0,014 + 1,028 = 1,042$.

Der Zinssatz beträgt zunächst 4,2% und sinkt dann auf 1,4%.

v.) Svenja zahlt 2.400 € ein. Der Zinssatz ist 2,5 %. Nach vier Jahren zahlt sie 1.200 € ein und der Zinssatz steigt an. Dieser neue Zinssatz ist drei Jahre lang gültig. Dann zahlt sie 1.500 € und der Zinssatz sinkt auf 3,3 %. Nach weiteren drei Jahren beträgt der Kontostand 6.412,42 €.

a.) Bestimmen Sie den zweiten Zinssatz. b.) Wie viele Zinsen hat sie erhalten?

Lösung:

$$\text{a.) } ((2.400 \cdot 1,025^4 + 1.200) \cdot x^3 + 1.500) \cdot 1,033^3 = 6.412,42 \quad | : 1,033^3 \quad | - 1.500$$

$$(2.400 \cdot 1,025^4 + 1.200) \cdot x^3 = 4.317,2938 \quad | : ()$$

$$x^3 = 1,121622 \quad | \sqrt[3]{} \quad x = 1,039 \quad \text{Der zweite Zinssatz beträgt 3,9\%}$$

$$\text{b.) } 2.400 + 1.200 + 1.500 = 5.100 \quad 6.412,42 - 5.100 = 1.312,42$$

Sie hat 1.312,42 € Zinsen erhalten.

w.) Bettina zahlt 3.000 € ein. Der Zinssatz ist 2,4 %. Nach fünf Jahren zahlt sie 1.000 € ein. Ein Jahr später steigt der Zinssatz auf 4 % an. Wie viele Jahre dauert es insgesamt, bis ihr Guthaben auf 5.244,20 € angewachsen ist?

Lösung: $(3.000 \cdot 1,024^5 + 1.000) \cdot 1,024 \cdot 1,04^n = 5.244,20 \quad | \cdot T$

$$4.482,7645 \cdot 1,04^n = 5.244,20 \quad | : 4.482,7645$$

$$1,04^n = 1,1698585 \quad | \log \quad n = \log_{1,04} 1,1698585 = 4 \quad 5 + 1 + 4 = 10$$

Es dauert 10 Jahre bis das Guthaben auf 5.244,20 € angewachsen ist.

x.) Du legst 7.000 € zu einem Zinssatz von 3,2% an. Am Ende jeden Jahres erhältst du deine Zinsen. Wann werden diese Zinsen erstmals mehr als 300 € betragen und wie hoch werden diese Zinsen sein?

Lösung: Wie hoch muss das Guthaben sein, damit 3,2% mindestens 300 € sind?

$$300 / 3,2 \cdot 100 = 9.375 \quad \text{Das Guthaben muss mindestens 9.375 € betragen.}$$

$$7.000 \cdot 1,032^n = 9.375 \quad | : 7.000 \quad | \log \quad n = \log_{1,032} 1,339286 \approx 9,2746$$

$$\text{Nach 9 Jahren ist das Guthaben noch zu gering: } 7.000 \cdot 1,032^9 = 9.294,27$$

$$\text{Nach 10 Jahren ist das Guthaben groß genug: } 7.000 \cdot 1,032^{10} = 9.591,69$$

$$9.591,69 \cdot 0,032 = 306,93$$

Am Ende des 11. Jahres werden die Zinsen erstmals höher als 300 € sein. Sie betragen dann 306,93 €.

y.) Herr Bechtold zahlt 800 € und ein Jahr später weitere 1.200 € auf sein Konto ein. Der Zinssatz beträgt 3,5%. a.) Wie viele Zinsen hat er nach 2 Jahren erhalten?

b.) Er erhält in den zwei Jahren 120,16 € Zinsen. Der Zinssatz steigt nach einem Jahr um 2,6 Prozentpunkte an. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?

Lösung: a.) $(800 \cdot 1,035 + 1.200) \cdot 1,035 = 2.098,98 \quad 2.098,98 - (800 + 1.200) = 98,98$

Er hat nach 2 Jahren 98,98 € Zinsen erhalten.

b.) $(800 \cdot x + 1.200) \cdot (x + 0,026) = 800 + 1.200 + 120,16 \quad | \cdot T$

$$800x^2 + 20,8x + 1.200x + 31,2 = 2.120,16 \quad | : 800 \quad | - 2,6502$$

$$x^2 + 1,526x - 2,6112 = 0 \quad x_{1/2} = -0,763 \pm \sqrt{0,763^2 + 2,6112} = -0,763 \pm \sqrt{3,193369} = -0,763 \pm 1,787$$

$$x_1 = -0,763 - 1,787 = -2,55 \quad x_2 = -0,763 + 1,787 = 1,024$$

Der Zinssatz im ersten Jahr war 2,4 % und im zweiten Jahr 5 %.