

5. Übungsaufgabe zur Tilgungsrechnung

5. Jemand nimmt Schulden in Höhe von 168.000 €. Der Zinssatz beträgt 3,7%. Die Schulden sollen innerhalb von 16 Jahren getilgt werden.
- a.) Bestimmen Sie die Höhe der Annuität.
 - b.) Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten drei Jahre.
 - c.) Wie verteilt sich die neunte Annuität auf die Tilgung und auf die Zinsen? Geben Sie Ihr Ergebnis sowohl in € als auch in Prozent an.
 - d.) Wie hoch ist der mittlere Tilgungsbetrag, wenn die gesamte Laufzeit von 16 Jahren betrachtet wird?
 - e.) Wie viele Zinsen sind insgesamt zu zahlen?

Nach 10 Jahren steigt der Zinssatz auf 5,4% an.

Annahme: die Annuität wird an den neuen Zinssatz angepasst.

- f.) Bestimmen Sie die neue Annuität.
- g.) Wie viele Zinsen muss die Person insgesamt zusätzlich bezahlen im Vergleich zu einem über die gesamten 16 Jahre unveränderten Zinssatz von 3,7% ?

Annahme: die Annuität bleibt unverändert!

- h.) Wie viele Schulden verbleiben am Ende der Laufzeit?

Die Schulden sollen wie geplant nach insgesamt 16 Jahren getilgt sein.

- i.) Hierzu sollen zwei Sondertilgungen in gleicher Höhe geleistet werden und zwar zwei und drei Jahre nach der Zinserhöhung. Wie hoch müssen diese Sondertilgungen sein?
- j.) Wie hoch müsste eine einzige Sondertilgung zum Zeitpunkt der Zinserhöhung sein?
- k.) Wie hoch müsste eine einzige Sondertilgung vier Jahre nach der Zinserhöhung sein?

Jemand nimmt Schulden in Höhe von 168.000 €. Der Zinssatz beträgt 3,7%. Die Schulden sollen innerhalb von 16 Jahren getilgt werden.

a.) Bestimme die Höhe der Annuität.

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 168.000 \cdot 1,037^{16} \cdot \frac{1,037-1}{1,037^{16}-1} \approx 14.100,51$$

Die Annuität beträgt ca. 14.100,51 €

b.) Erstelle den Tilgungsplan für die ersten drei Jahre.

Der Tilgungsplan für die ersten drei Jahre. Alle Angaben in €.

Jahr	Schulden am Jahresanfang in €	Annuität in €	Zinsen in €	Tilgung in €	Schulden am Jahresende in €
1	168.000,00	14.100,51	6216,00	7884,51	160.115,49
2	160.115,49	14.100,51	5924,27	8176,24	151.939,25
3	151.939,25	14.100,51	5621,75	8478,76	143.460,49

c.) Wie verteilt sich die neunte Annuität auf die Tilgung und auf die Zinsen? Gib dein Ergebnis sowohl in € als auch in Prozent an.

$$S_8 = K \cdot q^8 - A \cdot \frac{q^8-1}{q-1} = 168.000 \cdot 1,037^8 - 14.100,51 \cdot \frac{1,037^8-1}{1,037-1} \approx 96.122,31$$

Nach 8 Jahren, also zu Beginn des 9. Jahres beträgt der Schuldenstand 96.122,31 €.

Zinsen: $96.122,31 \cdot 0,037 = 3.556,53$ Tilgung: $14.100,51 - 3.556,53 = 10.543,98$

$$\frac{3.556,53}{14.100,51} \cdot 100\% \approx 25,22\% \quad 100\% - 25,22\% = 74,78\%$$

Von der 9. Annuität entfallen 3.556,53 € auf die Zinsen, dies entspricht 25,22%.

Auf die Tilgung entfallen 10.543,98 €, dies entspricht 74,78%.

d.) Wie hoch ist der mittlere Tilgungsbetrag, wenn die gesamte Laufzeit von 16 Jahren betrachtet wird?

$$168.000 \text{ €} : 16 = 10.500 \text{ €.} \quad \text{Der mittlere Tilgungsbetrag beläuft sich auf 10.500 €.}$$

e.) Wie viele Zinsen sind insgesamt zu zahlen?

$$16 \cdot 14.100,51 \text{ €} = 225.608,16 \text{ €} \quad 225.608,16 \text{ €} - 168.000 \text{ €} = 57.608,16 \text{ €}$$

Es sind insgesamt 57.608,16 € Zinsen zu bezahlen.

Nach 10 Jahren steigt der Zinssatz auf 5,4% an.

Annahme: die Annuität wird an den neuen Zinssatz angepasst.

f.) Bestimme die neue Annuität.

Schulden nach 10 Jahren:

$$S_{10} = K \cdot q^{10} - A \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 168.000 \cdot 1,037^{10} - 14.100,51 \cdot \frac{1,037^{10} - 1}{1,037 - 1} \approx 74.644,21$$

Der Schuldenstand nach 10 Jahren beläuft sich auf 74.644,21 €.

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = 74.644,21 \cdot 1,054^6 \cdot \frac{1,054 - 1}{1,054^6 - 1} \approx 14.894,87$$

Die neue – an den neuen Zinssatz angepasste – Annuität beläuft sich auf 14.894,87 €.

g.) Wie viele Zinsen muss die Person insgesamt zusätzlich bezahlen im Vergleich zu einem über die gesamten 16 Jahre unveränderten Zinssatz von 3,7% ?

$$6 \cdot (14.894,87 - 14.100,51) = 6 \cdot 794,36 = 4.766,16$$

Sie muss 4.766,16 € zusätzlich an Zinsen bezahlen.

Annahme: die Annuität bleibt unverändert!

h.) Wie viele Schulden verbleiben am Ende der Laufzeit?

$$S_6 = K \cdot q^6 - A \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 74.644,21 \cdot 1,054^6 - 14.100,51 \cdot \frac{1,054^6 - 1}{1,054 - 1} \approx 5.457,83$$

Es verbleiben am Ende der 16 Jahre Schulden in Höhe von 5.457,83 €.

Die Schulden sollen wie geplant nach insgesamt 16 Jahren getilgt sein.

i.) Hierzu sollen zwei Sondertilgungen in gleicher Höhe geleistet werden und zwar zwei und drei Jahre nach der Zinserhöhung. Wie hoch müssen diese Sondertilgungen sein?

$$S \cdot 1,054^4 + S \cdot 1,054^3 = 5.457,83 \quad | \quad T$$

$$S \cdot (1,054^4 + 1,054^3) = 5.457,83 \quad | \quad : ()$$

$$S \approx 2.269,33$$

Die Sondertilgungen müssten jeweils 2.269,33 € betragen.

Erklärung: Die Sondertilgung die vier Jahre vor dem Ende der Laufzeit des Kredits erfolgt, wird mit dem Faktor $1,054^4$ gewichtet, um zu berechnen was dieser Betrag vier Jahre später ‚wert sein wird‘.

j.) Wie hoch müsste eine einzige Sondertilgung zum Zeitpunkt der Zinserhöhung sein?

$$S = \frac{5.457,83}{1,054^6} \approx 3.980,85$$

Die Sondertilgung müsste 3.980,85 € betragen.

k.) Wie hoch müsste eine einzige Sondertilgung vier Jahre nach der Zinserhöhung sein?

$$S = \frac{5.457,83}{1,054^2} \approx 4.912,91$$

Die Sondertilgung müsste 4.912,91 € betragen.