

Anette nimmt 118.000 € Schulden auf, die sie in gleichbleibenden Annuitäten innerhalb von 20 Jahren tilgen möchten. Der Zinssatz beträgt 4,6%.

a.) Bestimme die Annuität.

$$A = 118.000 \cdot 1,046^{20} \cdot \frac{1,046 - 1}{1,046^{20} - 1} = 9.150,159421$$

Die Annuität beträgt 9.150,16 €

Nach 10 Jahren nimmt sie ihr Sondertilgungsrecht in Anspruch und zahlt zusätzliche 15.000 € zurück.

Sie tilgt den Kredit weiterhin mit der ursprünglichen Annuität.

b.) Nach wie vielen Jahren hat sie ihre Schulden komplett getilgt?

Der Schuldenstand nach 10 Jahren:

$$S_{10} = 118.000 \cdot 1,046^{10} - 9.150,16 \cdot \frac{1,046^{10} - 1}{1,046 - 1} = 72.047,96$$

$$72.047,96 \text{ €} - 15.000,00 \text{ €} = 57.047,96 \text{ €}$$

Der Schuldenstand nach n weiteren Jahren berechnet sich so:

$$S_n = 57.047,96 \cdot 1,046^n - 9.150,16 \cdot \frac{1,046^n - 1}{1,046 - 1}$$

Um festzustellen, nach wie vielen Jahren die Schulden komplett getilgt sind, setzen wir diesen Schuldenstand auf 0 und lösen die Gleichung nach n auf.

$$0 = 57.047,96 \cdot 1,046^n - 9.150,16 \cdot \frac{1,046^n - 1}{0,046} \quad | + \frac{9.150,16}{0,046} \cdot (1,046^n - 1)$$

$$198.916,52 \cdot (1,046^n - 1) = 57.047,96 \cdot 1,046^n \quad | \text{ T}$$

$$198.916,52 \cdot 1,046^n - 198.916,52 = 57.047,96 \cdot 1,046^n \quad | - 57.047,96 \cdot 1,046^n \quad | + 198.916,52$$

$$141.868,56 \cdot 1,046^n = 198.916,52 \quad | : 141.868,56$$

$$1,046^n = 1,40212 \quad | \log \quad n = \log_{1,046} 1,40212 = 7,515$$

Nach sieben weiteren Jahren hat sie ihre Schulden also noch nicht komplett getilgt. Sie benötigt also acht weitere Jahre, wobei die Schulrate niedriger ausfallen wird.

c.) Wie hoch ist die Schlussrate?

Wir berechnen also den Schuldenstand nach 7 weiteren Jahren:

$$S_7 = 57.047,96 \cdot 1,046^7 - 9.150,16 \cdot \frac{1,046^7 - 1}{1,046 - 1} \approx 4.556,04$$

Wie viele Zinsen muß sie im 18. Jahr bezahlen? $4.556,04 \text{ €} \cdot 0,046 = 209,58 \text{ €}$.

$4.556,04 \text{ €} + 209,58 \text{ €} = 4.765,62 \text{ €}$ **Die Schlußrate beträgt 4.765,62 €**

d.) Erstelle den Tilgungsplan.

Am Ende des 10. Jahres ist die Annuität durch die Sondertilgung um 15.000.- € höher. Dieser Wert ist rot markiert.

Jahr	Schulden zum Jahresbeginn	Annuität	Zinsen	Tilgungsanteil	Schulden zum Jahresende
1	118000,00	9150,16	5428,00	3722,16	114277,84
2	114277,84	9150,16	5256,78	3893,38	110384,46
3	110384,46	9150,16	5077,69	4072,47	106311,99
4	106311,99	9150,16	4890,35	4259,81	102052,18
5	102052,18	9150,16	4694,40	4455,76	97596,42
6	97596,42	9150,16	4489,44	4660,72	92935,70
7	92935,70	9150,16	4275,04	4875,12	88060,58
8	88060,58	9150,16	4050,79	5099,37	82961,21
9	82961,21	9150,16	3816,22	5333,94	77627,26
10	77627,26	24150,16	3570,85	20579,31	57047,96
11	57047,96	9150,16	2624,21	6525,95	50522,00
12	50522,00	9150,16	2324,01	6826,15	43695,86
13	43695,86	9150,16	2010,01	7140,15	36555,71
14	36555,71	9150,16	1681,56	7468,60	29087,11
15	29087,11	9150,16	1338,01	7812,15	21274,96
16	21274,96	9150,16	978,65	8171,51	13103,45
17	13103,45	9150,16	602,76	8547,40	4556,04
18	4556,04	4765,62	209,58	4556,04	0,00

Die Annuität wird so angepasst, dass Anettes Schulden wie ursprünglich geplant erst nach 20 Jahren getilgt sind.

e.) Bestimme die neue Annuität.

$$A = 57.047,96 \cdot 1,046^{10} \cdot \frac{1,046 - 1}{1,046^{10} - 1} = 7.245,15$$

Die neue Annuität beträgt **7.245,15 €**

f.) Erstelle den Tilgungsplan.

Am Ende des 10. Jahres ist die Annuität durch die Sondertilgung um 15.000.- € höher. Dieser Wert ist rot markiert. Die neue Annuität ist im 11. Jahr grün markiert

Jahr	Schulden zum Jahresbeginn	Annuität	Zinsen	Tilgungsanteil	Schulden zum Jahresende
1	118000,00	9150,16	5428,00	3722,16	114277,84
2	114277,84	9150,16	5256,78	3893,38	110384,46
3	110384,46	9150,16	5077,69	4072,47	106311,99
4	106311,99	9150,16	4890,35	4259,81	102052,18
5	102052,18	9150,16	4694,40	4455,76	97596,42
6	97596,42	9150,16	4489,44	4660,72	92935,70
7	92935,70	9150,16	4275,04	4875,12	88060,58
8	88060,58	9150,16	4050,79	5099,37	82961,21
9	82961,21	9150,16	3816,22	5333,94	77627,26
10	77627,26	24150,16	3570,85	20579,31	57047,96
11	57047,96	7245,15	2624,21	4620,94	52427,02
12	52427,02	7245,15	2411,64	4833,50	47593,52
13	47593,52	7245,15	2189,30	5055,84	42537,67
14	42537,67	7245,15	1956,73	5288,41	37249,26
15	37249,26	7245,15	1713,47	5531,68	31717,58
16	31717,58	7245,15	1459,01	5786,14	25931,44
17	25931,44	7245,15	1192,85	6052,30	19879,15
18	19879,15	7245,15	914,44	6330,70	13548,44
19	13548,44	7245,15	623,23	6621,92	6926,52
20	6926,52	7245,15	318,62	6926,52	0,00

g.) Wie viele Zinsen hätte Anette ohne die Sondertilgung insgesamt bezahlt?

Wir berechnen, wie viel Geld Anette insgesamt bezahlt hat. Davon subtrahieren wir den Betrag, den sie getilgt hat. Die Zinsen sind das Geld, welches nicht in die Tilgung geflossen ist.

$$20 \cdot 9.150,16 - 118.000 = 183.003,20 - 118.000 = 65.003,20$$

Ohne die Sondertilgung hätte sie insgesamt **65.003,20 € Zinsen** bezahlen müssen.

h.) Wie viele Zinsen hat sie aufgrund der Sondertilgung weniger bezahlt?
Bestimme dies für beide Fälle: unveränderte und angepasste Annuität.

unveränderte Annuität:

$$17 \cdot 9.150,16 + 15.000 + 4.765,62 = 175.318,34$$

$$175.318,34 - 118.000 = 57.318,34 \quad 65.003,20 - 57.318,34 = 7.684,86$$

Mit der Sondertilgung und unveränderter Annuität zahlt Anette insgesamt „nur“ **57.318,34 € Zinsen**. Aufgrund der Sondertilgung zahlt sie **7.684,86 € weniger Zinsen**.

angepasste Annuität:

$$10 \cdot 9.150,16 + 15.000 + 10 \cdot 7.245,15 = 178.953,10$$

$$178.953,10 - 118.000 = 60.953,10 \quad 65.003,20 - 60.953,10 = 4.050,10$$

Mit der Sondertilgung und angepasster Annuität zahlt Anette insgesamt „nur“ **60.953,10 € Zinsen**. Aufgrund der Sondertilgung zahlt sie **4.050,10 € weniger Zinsen**.