Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

1. Für einen Mietwagen ist eine Grundgebühr in Höhe von 19 € zu zahlen und jeder km kostet 20 cent. Du musst 37 € bezahlen. Wie viele km bist du gefahren?

Lösungsweg A:

37 – 19 = 18   Über die Grundgebühr hinaus sind 18 € zu bezahlen.

1 km	≙	0,2 €		
5 km	≙	1 €	5 km kosten 1 €	(mit 5 multiplizieren)
90 km	≙	18 €	90 km kosten 18 €	(mit 18 multiplizieren)

Lösungweg B:

$37 = 0{,}2 \cdot x + 19 \quad | -19 \;|\; :0{,}2 \quad x = 90$ (x: Anzahl der gefahrenen km)

Du bist 90 km weit gefahren.

2 a.) Nachdem der Preis eines Produktes um 40% reduziert wurde, kostet es 42 €. Wie teuer war es vorher?

Der ursprüngliche Preis entspricht 100%. Nach der Preissenkung beträgt der Preis 100% – 40% = 60% des ursprünglichen Preises. Du hast zwei Mögichkeiten, den ursprünglichen Preis zu bestimmen.

Lösungsweg A:

60%	≙	42 €	
10%	≙	7 €	(Du musst durch 6 teilen)
100%	≙	70 €	

Lösungsweg B: $\frac{P}{100\%} = \frac{42€}{60\%} \quad | \cdot 100\%$ $P = 42€ \cdot \frac{100\%}{60\%} = 70€$

Der ursprüngliche Preis war 70 €.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

2 b.) Ein Produkt kostet zunächst 84 €. Der Preis sinkt um 8%. Wie teuer ist es dann?

Lösungsweg A:

84 € ≙ 100%
0,84 € ≙ 1 % (durch 100 teilen)
6,72 € ≙ 8 % (mit 8 multiplizieren)

84,00 € – 6,72 € = 77,28 €

Lösungsweg B:

100% – 8% = 92%

$$\frac{P}{92\%} = \frac{84€}{100\%} \quad | \cdot 92\%$$

$$P = 84€ \cdot \frac{92\%}{100\%} = 77,28€$$

Das Produkt kostet nach der Preissenkung 77,28 €.

2 c.) Nachdem der Preis eines Produktes um 20% erhöht wurde, kostet es 54 €. Wie teuer war es vorher?

Lösungsweg A:

54 € ≙ 120%
9 € ≙ 20 % (durch 6 teilen)
45 € ≙ 100 % (mit 5 multiplizieren)

Lösungsweg B:

$$\frac{P}{100\%} = \frac{54€}{120\%} \quad | \cdot 100\%$$

$$P = 54€ \cdot \frac{100\%}{120\%} = 45€$$

Das Produkt kostete vor der Preiserhöhung 45 €.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

**2 d.) Der Kurs einer Aktie sinkt um 45%. Anschließend steigt der Kurs um 60% an.
Wie hat sich der Aktienkurs insgesamt verändert?**

Am einfachsten ist es, wenn du von einem Anfangsaktienkurs in Höhe von 100 € ausgehst.

100 € – 45 € = 55 € Der Aktienkurs sinkt zunächst um 45% von 100 € auf 55 €.

55,00 €	≙	100%	
5,50 €	≙	10 %	(durch 10 teilen)
33,00 €	≙	60 %	(mit 6 multiplizieren)

55,00 € + 33,00 € = 88,00 € Der Aktienkurs steigt dann um 60% von 55 € auf 88 € an.

Insgesamt ist der Aktienkurs von 100 € auf 88 € gesunken. Das sind 12 € und somit 12 %.

Anderer Rechenweg:

$$1\cdot(1-\frac{45}{100})\cdot(1+\frac{60}{100})=1\cdot 0,55\cdot 1,6=0,88 \qquad (1-0,88)\cdot 100\%=12\%$$

Der Aktienkurs ist insgesamt um 12 % gesunken.

3. Fassen diese Brüche zu einem Bruch zusammen und kürze dann soweit wie möglich:

a.) $$\pi\cdot r-\frac{\pi\cdot r}{2}-\frac{\pi\cdot r}{4}=\frac{4\cdot\pi\cdot r}{4}-\frac{2\cdot\pi\cdot r}{4}-\frac{\pi\cdot r}{4}=\frac{\pi\cdot r}{4}$$

b.) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{10}{20}+\frac{1}{20}=\frac{11}{20}$$

c.) $$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:5=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

d.) Vereinfache: $$\frac{12b^2+4b}{4b}=\frac{4b\cdot(3b+1)}{4b}=3b+1$$

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

4. Berechne und stellen das Ergebnis als Dezimalzahl dar:

a.) $\frac{0,35}{0,005} = \frac{350}{5} = 70$

b.) $\frac{0,012}{0,024} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0,5$

c.) 4.200 · 0,04 = 42 · 4 = **168**

d.) $\frac{8,2}{0,2} = \frac{82}{2} = 41$

e.) 0,9 · 0,4 = 0,09 · 4 = **0,36**

5. Stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar (mit Rechenweg)

a.) $\frac{10^{-3}}{7^{-2}} = \frac{7^2}{10^3} = \frac{49}{1.000} = 0,049$

b.) $\frac{28 + 42 \cdot 10^{-2}}{7} = 4 + 6 \cdot 10^{-2} = 4 + \frac{6}{10^2} = 4 + \frac{6}{100} = 4 + 0,06 = 4,06$

c.) $900^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-2} = \frac{\sqrt{900}}{5^2} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$

d.) $\frac{5^{-1} + 10^{-2}}{5^{-1} + 10^{-1}} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{10^2}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{0,2 + 0,01}{0,2 + 0,1} = \frac{0,21}{0,3} = \frac{2,1}{3} = 0,7$

6. Fasse zu einem Bruch zusammen und kürze diesen Bruch so weit wie möglich.

a.) $\frac{36x^2y-4xy}{4xy}-\frac{70x^2y^2-14xy^2}{7xy^2}=9x-1-(10x-2)=9x-1-10x+2=-x+1$

b.) $(25a^4+10a^3)\cdot\frac{2+a}{5a^3}-2a\cdot(3a+6)=\frac{25a^4+10a^3}{5a^3}\cdot(2+a)-6a^2-12a$

$=(5a+2)\cdot(2+a)-6a^2-12a=10a+5a^2+4+2a-6a^2-12a=-a^2+4$

7. Vereinfache diesen Term durch Anwendung der Potenzgesetze zunächst so weit wie möglich und stelle dann das Ergebnis als Dezimalzahl dar:

$$\frac{14^{14}\cdot 2^8}{7^5\cdot 7^2\cdot 14^6\cdot 4^7}=\frac{14^8\cdot 2^8}{7^7\cdot 4^7}=\frac{28^8}{28^7}=28$$

8. Welche x erfüllen die folgende Gleichung? Bestätige dein Ergebnis durch eine Probe.

$3\cdot(x-1)^2-(x+1)\cdot(x-4)=2\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

$3\cdot(x^2-2x+1)-(x^2-4x+x-4)=2\cdot(x^2-2x+2x-4)$

$3x^2-6x+3-(x^2-3x-4)=2\cdot(x^2-4)$ $\qquad$ $3x^2-6x+3-x^2+3x+4=2x^2-8$

$2x^2-3x+7=2x^2-8 \quad |-2x^2-7$ $\qquad$ $-3x=-15 \quad |:(-3)$ $\qquad$ **$x=5$**

Probe: $3\cdot(5-1)^2-(5+1)\cdot(5-4)=3\cdot 4^2-6\cdot 1=3\cdot 16-6=48-6=42$

$2\cdot(5+2)\cdot(5-2)=2\cdot 7\cdot 3=2\cdot 21=42$

9. a.) Du musst für ein Produkt 96 € bezahlen, nachdem du 20% Rabatt erhalten haben. Wie teuer war es vorher?

Der ursprüngliche Preis entspricht 100%. Nach der Preissenkung beträgt der Preis 100% – 20% = 80% des ursprünglichen Preises. Du hast zwei Mögichkeiten, den ursprünglichen Preis zu bestimmen.

Lösungsweg A:

80% ≙ 96 €
10% ≙ 12 € (durch 8 teilen)
100% ≙ 120 €

Lösungsweg B: $\frac{P}{100\%} = \frac{96€}{80\%} \quad | \cdot 100\%$ $\qquad P = 96€ \cdot \frac{100\%}{80\%} = 120€$

Der ursprüngliche Preis war 120 €.

9. b.) Wie viel ist 4,25% von 480 €?

480 € ≙ 100%
4,8 € ≙ 1 %
1,2 € ≙ 0,25 % (1 % durch 4 teilen)
19,2 € ≙ 4 % (1 % mit 4 multiplizieren)

19,20 € + 1,20 € = 20,40 € **4,25% von 480 € sind 20,40 €.**

Hinweis: Ohne Taschenrechner ist dies der beste Lösungsweg. Mit einem Taschenrechner geht es schneller, indem du einfach 480 · 0,0425 oder 4,8 · 4,25 eintippst.

10. **Für einen Mietwagen ist die Grundgebühr zu zahlen und zusätzlich ist für jeden gefahrenen km ein Betrag zu zahlen. Wer 70 km fährt, muss 44,40 € bezahlen, wer 100 km fährt, muss 54 € bezahlen. Wie hoch ist die Grundgebühr und wie viel ist pro gefahrenen km zu zahlen?**

$$m = \frac{54,00 - 44,40}{100 - 70} = \frac{9,6}{30} = \frac{0,96}{3} = 0,32$$

Wer 30 km weiter fährt, muss hierfür 9,60 € mehr bezahlen. 1 km weiter fahren kostet also 0,32 €.

Für 100 km sind dann 32 € zu zahlen. Mit der Grundgebühr sind es laut Aufgabenstellung aber 54 €. Diese Differenz ist die Grundgebühr. 54 € − 32 € = 22 €

Alternativer Lösungsweg:

y = 54 ; m = 0,32 und x = 100 in y = m · x + b einsetzen und dann nach b auflösen:

54 = 0,32 · 100 + b | – 32 b = 22

Hinweis: Statt y = 54 und x = 100 hättest du natürlich auch y = 44,40 und x = 70 einsetzen können.

Die Grundgebühr beträgt 22 €. Pro gefahrenen km sind 0,32 € zu zahlen.

11. **Bestimme die Gleichung der zu dieser Wertetabelle gehörenden Geraden:**

x	20	40	60	80	100
y	26	38	50	62	74

$$m = \frac{74 - 62}{100 - 80} = \frac{12}{20} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

y = 74 ; m = 0,6 und x = 100 in y = m · x + b einsetzen und dann nach b auflösen:

74 = 0,6 · 100 + b | – 60 b = 14 **y = 0,6 · x + 14**

1. Hinweis: Statt y = 74 und x = 100 hättest du auch jedes andere Wertepaar einsetzen können.

2. Hinweis: Diese Aufgabe ist mit Aufgabe 10 identisch (bis auf die Zahlenwerte und die Formulierung der Aufgabe)

12. Wähle für jede Variable einen geeigneten Wert*, so dass die Gleichung erfüllt ist.
*** alle Variablen sollen unterschiedliche Werte erhalten. Keine Variable soll den Wert 0 oder 1 erhalten.**
Löse dann die Gleichungen nach a auf (allgemein, nicht mit den von dir gewählten Zahlen). Überprüfen dann deine Lösung, indem du die Probe mit deinen selbst gewählten Werten machst.

a.) $\frac{b}{a} = c + d$ a = 2 ; b = 20 ; c = 6 ; d = 4 (zum Beispiel)

$\frac{b}{a} = c + d \quad | \cdot a$ $\quad b = (c + d) \cdot a \quad |:(c + d)$ $\quad a = \frac{b}{c + d}$ Probe: $2 = \frac{20}{6+4} = \frac{20}{10} = 2$

b.) $f = b \cdot c + a \cdot (d + e)$ a = 2 ; b = 3 ; c = 5 ; d = 4 ; e = 6 ; f = 35 (zum Beispiel)

$f = b \cdot c + a \cdot (d + e) \quad | - b \cdot c \quad | : (d + e)$ $\quad a = \frac{f - b \cdot c}{d + e}$ Probe: $2 = \frac{35 - 3 \cdot 5}{6 + 4} = \frac{20}{10} = 2$

13. Vereinfache diesen Term

$6y + 2y \cdot (- 0{,}4 \cdot (18y \mathbf{- 5 \cdot (-x + 4y)}) + 2x - 3) = 6y + 2y \cdot (- 0{,}4 \cdot (\mathbf{18y + 5x - 20y}) + 2x - 3)$

$= 6y + 2y \cdot (\mathbf{- 0{,}4 \cdot (5x - 2y)} + 2x - 3) = 6y + 2y \cdot \mathbf{(- 2x + 0{,}8y + 2x - 3)} = 6y + \mathbf{2y \cdot (0{,}8y - 3)}$

$= 6y + \mathbf{1{,}6y^2 - 6y} = \mathbf{1{,}6y^2}$ **Rot:** Nächster Schritt **Orange:** Ergebnis des vorherigen Schritts

14. Löse die Klammern auf:

a.) $(5x - 2)^2 = (5x - 2) \cdot (5x - 2) = 25x^2 - 2 \cdot 5x - 2 \cdot 5x + 4 = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = \mathbf{25x^2 - 20x + 4}$

b.) $(2x - 4) \cdot (x + 3) = 2x^2 - 4x + 6x - 12 = \mathbf{2x^2 + 2x - 12}$

15. **In einer Klasse mit 14 Mädchen (M = 14) und 10 Jungen (J = 10) muss jeder Schüler 700 Kopien (K = 700) zu 4 cent pro Kopie (P = 0,04) bezahlen. Außerdem muss jeder Schüler 180 € für Bücher ausgeben(B = 180).**
a.) Wie viel müssen alle Schüler zusammen bezahlen?
b.) Erstelle allgemein die Gleichung für die Gesamtkosten G, wobei jede Variable in dieser Gleichung nur einmal vorkommen soll.

a.) $14 + 10 = 24$ $\quad 700 \cdot 0{,}04 = 28$ $\quad 180 + 28 = 208$ $\quad 24 \cdot 208 = 4.992$

Alle Schüler zusammen müssen 4.992 € zahlen.

b.) $G = (M + J) \cdot (K \cdot P + B)$

16.

7 Schalen Himbeeren und 6 Schalen Brombeeren kosten 36,70 €
2 Schalen Himbeeren und 4 Schalen Brombeeren kosten 17,80 €

Wie viel kostet eine Schale Himbeeren?
Wie viel kostet eine Schale Brombeeren?

x: Preis für eine Schale Himbeeren in € **x: Preis für eine Schale Brombeeren in €**

I $\quad 7x + 6y = 36{,}70$ $\qquad 2 \cdot$ I $\quad 14x + 12y = 73{,}40$
II $\quad 2x + 4y = 17{,}80$ $\qquad 3 \cdot$ II $\quad 6x + 12y = 53{,}40$

Hinweis: Nun können wir die Variable y "loswerden", weil in beiden Gleichugen 12y steht.

$2 \cdot \text{I} - 3 \cdot \text{II} \quad 8x = 20{,}00 \quad | : 8 \quad x = 2{,}5$

$x = 2{,}5$ in II einsetzen $\quad 5 + 4y = 17{,}80 \mid -5 \quad 4y = 12{,}80 \quad | : 4 \quad y = 3{,}20$

Ein Schale Himbeeren kostet 2,50 € und eine Schale Brombeeren kosten 3,20 €.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

17. Ein Quadrat hat die Seitenlänge 40cm. Bestimme die Fläche in cm², in mm² und in m².

40 cm · 40 cm = **1.600 cm²** 400 mm · 400 mm = **160.000 mm²**

0,4 m · 0,4 m = **0,16 m²**

Umrechnung: **1 cm²** = 10 mm · 10 mm = **100 mm²** = 0,01 m · 0,01 m = **0,0001 m²**

18. Zwei Quadrate unterscheiden sich dadurch, dass die Seitenlänge von Quadrat A um 20% größer ist als die Seitenlänge von Quadrat B. Um wie viel Prozent ist die Fläche von Quadrat A größer als die Fläche von Quadrat B?

Quadrat B ist z.B. 10 cm · 10 cm = 100 cm² groß.

Quadrat A ist dann 12 cm · 12 cm = 144 cm² groß.

Quadrat A ist um 44 % größer als Quadrat B.

19. Provider A für mobiles Internet verlangt eine Grundgebühr in Höhe von 3,90 € und pro Gigabyte (GB) Datenvolumen 45 cent. Mitbewerber B verlangt eine Grundgebühr in Höhe von 6,90 € und pro Gigabyte (GB) Datenvolumen 30 cent.
Ab welchem Datenvolumen ist Anbieter B günstiger als Anbieter A?

0,45 · x + 3,90 = 0,30 · x + 6,90 | – 0,30 · x | – 3,90 0,15 · x = 3,00 | : 0,15 x = 20

Ab einem Datenvolumen von 20 GB ist Anbieter B günstiger als sein Mitbewerber A.

Alternativer Lösungsweg:

6,90 – 3,90 = 3,00	Anbieter B verlangt eine um 3,00 € höhere Grundgebühr
0,45 – 0,30 = 0,15	Dafür verlangt Anbieter B aber auch 0,15 € weniger pro GB Datenvolumen
3,00 / 0,15 = 20	Nach 20 GB ist diese Preisdifferenz weg. Von da ab ist Anbeiter B günstiger.

20. **Berechne und stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar:**

a.) $5,9 \cdot 10^{-3} = \frac{5,9}{10^3} = \frac{5,9}{1.000} = 5,9 \cdot 0,001 = 0,0059$

b.) $14 \cdot 2^{-2} = \frac{14}{2^2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$

c.) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$

21. **Ein kleiner Betrieb zahlt für zwei Autos pro Halbjahr insgesamt 4.500 € für Leasing-Raten. Die monatliche Leasing-Rate des einen Autos ist um 90 € höher als die des anderen Autos. Bestimmen Sie die monatlichen Leasing-Raten der beiden Autos.**

4.500 : 6 = 750 Für beide Autos zusammen sind pro Monat 750 € zu zahlen.

I x + y = 750 x: monatliche Leasingrate für das teurere Auto.
II x = y + 90 y: monatliche Leasingrate für das preiswertere Auto.

x = y + 90 in Gleichung I einsetzen: y + 90 + y = 750 | – 90 2y = 660 | : 2 y = 330

y = 330 in x = y + 90 einsetzen: x = 330 + 90 = 420

Die monatlichen Leasingraten betragen 330 € und 420 €.

22. **Du fährst mit dem Auto von A nach B. Auf der ersten Hälfte der Strecke fährst du 40 km/h und auf der zweiten Hälfte der Strecke fährst du 160 km/h schnell. Wie hoch ist deine mittlere Geschwindigkeit auf der Gesamtstrecke?**

Du wählst eine geeignete Gesamtstrecke, am besten 160 km + 160 km = 320 km.

1. Hälfte der Strecke: 160 km / 40 km/h = 4h
2. Hälfte der Strecke: 160 km / 160 km/h = 1h

4 h + 1 h = 5h

$$\frac{320\text{km}}{5\text{h}} = 64\text{km}/\text{h}$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt **64 km/h**.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

23. **Gegeben ist die Wertetabelle einer Geraden. Bestimme die zugehörige Geradengleichung.**

x	120	140	160	180
y	47	50	53	56

$$m = \frac{50-47}{140-120} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

y = 47 ; m = 0,15 und x = 120 in $y = m \cdot x + b$ einsetzen und dann nach b auflösen:

$47 = 0{,}15 \cdot 120 + b \;\;|-18$ b = 29 **$y = 0{,}15 \cdot x + 29$**

1. Hinweis: Statt y = 47 und x = 120 hättest du auch jedes andere Wertepaar einsetzen können.

24. **Dein Auto verbraucht auf 650 km 39 Liter Benzin. Ein Liter Benzin kostet 1,40 €.**

a.) Wie viel kostet es dich, wenn du 450 km weit fährst?

650 km ≙ 39 Liter
100 km ≙ 6 Liter (durch 6,5 geteilt. Wie oft passt 6,5 in 39 rein?)

6 · 1,40 = 8,40 Es musst pro 100 km 8,40 € für Benzin ausgeben.

100 km ≙ 8,40 €
400 km ≙ 33,60 € (8,40 € mit 4 mulitpliziert)
50 km ≙ 4,20 € (8,40 € durch 2 geteilt)
450 km ≙ 33,60 € + 4,20 € = 37,80 €

Du hast Benzinkosten in Höhe von **37,80 €**, wenn du 450 km weit fährst.

b.) Du tankst Benzin für 21 €. Wie weit kannst du mit diesem Benzin fahren?

100 km ≙ 8,40 €
250 km ≙ 21,00 € (8,40 € mit 2,5 mulitpliziert. Wie oft passt 8,4 in 21 rein?)

8,40 € · 2 = 16,80 €. Rest: 21,00 € – 16,80 € = 4,20 € (das ist genau die Hälfte von 8,40 €)
Also passen 8,40 € genau 2,5 mal in 21,00 € rein.

Alternativer Lösungsweg: 21,00 € : 1,40 € / Liter = 15 Liter. Für 21 € tankst du 15 Liter Benzin.
15 : 6 = 2,5 2,5 · 100 km = 250 km

Wenn du für 21 € Benzin tankst, kannst du damit **250 km** weit fahren.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

25. Es kosten 2 Liter Weißwein und 7 Liter Rotwein 51 €.
Es kosten 4 Liter Weißwein und 5 Liter Rotwein 48 €.
Wie viel kostet 1 Liter Weißwein? Wie viel kostet 1 Liter Rotwein?

x: Preis pro Liter Weißwein in €.   y: Preis pro Liter Rotwein in €.

Lösungsweg A: (Addtionsverfahren)

I $2x + 7y = 51$
II $4x + 5y = 48$

$2 \cdot$ I $4x + 14y = 102$
II $4x + 5y = 48$

$2 \cdot$ I – II $9y = 54 \quad | :9$

$y = 6$

$y = 6$ in Gleichung I einsetzen:

$2x + 7 \cdot 6 = 51 \quad | -42$

$2x = 9 \; | :2$

$x = 4{,}5$

Lösungsweg B: (Einsetzungsverfahren)

I $2x + 7y = 51$
II $4x + 5y = 48$

Gleichung I nach x auflösen:

$2x + 7y = 51 \quad | -7y \quad | :2 \qquad x = 25{,}5 - 3{,}5y$

$x = 25{,}5 - 3{,}5y$ in Gleichung II einsetzen

$4 \cdot (25{,}5 - 3{,}5y) + 5y = 48 \quad | \text{ T}$
$102 - 14y + 5y = 48 \quad | -102$
$-9y = -54 \quad | :(-9)$
$y = 6$

$y = 6$ in $x = 25{,}5 - 3{,}5y$ einsetzen:

$x = 25{,}5 - 3{,}5 \cdot 6 = 25{,}5 - 21 = 4{,}5$

Ein Liter Weißwein kostet 4,50 €.   **Ein Liter Rotwein kostet 6,00 €.**

Hinweis: Es gibt auch noch das Gleichsetzungsverfahren.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

26. Eine Kiste ist 200 mm lang, 10 cm breit und 0,08 m hoch.
a.) Welches Volumen hat die Kiste in m³, in cm³ und in mm³.
b.) Wie viele dieser Kisten passen in einen Container, der 12 m lang, 2,5 m breit und 3,2 m hoch ist? Wie viele der Kisten befinden sich in der untersten „Schicht"? Wie viele dieser „Schichten" gibt es?

20 cm · 10 cm · 8 cm = 200 cm^2 · 8 cm = **1.600 cm^3 = 1.600.000 mm^3 = 0,0016 m^3**

Erklärungen: 1cm^3 = 10 mm · 10 mm · 10 mm = 1.000 mm^3 (drei Nullen hinzufügen)
1 m^3 = 100 cm · 100 cm · 100 cm = 1.000.000 mm^3 (sechs Nullen hinzufügen)

200 mm = 0,2 m 12 m / 0,2 m = 60 Es passen 60 Kisten der Länge nach in den Container
10 cm = 0,1 m 2,5 m / 0,1 m = 25 Es passen 25 Kisten der Breite nach in den Container

60 · 25 = 1.500 **In der untersten „Schicht" befinden sich 1.500 Kisten.**

3,2 m / 0,08 m = 320 cm / 8 cm = 40 Es passen 40 Kisten der Höhe nach in den Container.

Es gibt 40 dieser „Schichten"

1.500 · 40 = 60.000 **Es passen 60.000 dieser Kisten in den Container.**

Alternativer Lösungsweg: 12 m · 2,5 m · 3,2 m = 30 m^2 · 3,2 m = 96 m^3 = 96.000.000 cm^3

96.000.000 cm^3 / 1.600 cm^3 = 60.000

27. Fasse zu einem Bruch zusammen und kürze dann diesen Bruch so weit wie möglich.

a.) $$\frac{12a^2+6ab}{6a}-4a^2\cdot\frac{4a^2-2ab}{8a^3}=2a+b-4a^2\cdot\frac{2a-b}{4a^2}=2a+b-(2a-b)$$
$$=2a+b-2a+b=2b$$

b.) $$5a^3\cdot\frac{4a^2}{3}-5a^6\cdot\frac{5a^4}{4a^5}=\frac{20a^5}{3}-\frac{25a^5}{4}=\frac{80a^5}{12}-\frac{75a^5}{12}=\frac{5}{12}\cdot a^5$$

c.) $$-\frac{a}{5}+b\cdot\frac{3a^2}{2b}+\frac{a}{3}-3a\cdot\frac{2a}{5}=-\frac{a}{5}+\frac{a}{3}+\frac{3a^2}{2}-\frac{6a^2}{5}=-\frac{3a}{15}+\frac{5a}{15}+\frac{15a^2}{10}-\frac{12a^2}{10}$$
$$=\frac{2}{15}\cdot a+\frac{3}{10}\cdot a^2$$

28. **Du willst eine 2,5 m hohe und 6 m lange Wand steichen. Fünf Liter Farbe kosten 45 € und reichen für 25 m². Wie viel kostet die Farbe zum Streichen der Wand?**

Welche Fläche willst steichen?	2,5 m · 6 m = 15 m²
Für wie viele m² reicht ein Liter Farbe?	25 m² : 5 Liter = 5 m² / Liter
Wie viele Liter Farbe werden benötigt?	15 m² : 5 m² / Liter = 3 Liter
Was kostet ein Liter Farbe?	45 € : 5 = 9 €
Was kosten drei Liter Farbe?	3 · 9 € = 27 € **Die Farbe kostet 27 €.**

29. **Gegeben ist die Gleichung** $(x+\frac{20}{x^2})\cdot(x^2+\frac{12}{x})=b$

Bestimme b für x = 2 , mulipliziere dann beide Seiten der Gleichung mit x und stelle dein Ergebnis auf zwei Arten so dar: (☐+☐) ·(☐+☐) = ☐ und überprüfe schließlich deine beiden Ergebnisse, indem Du die Probe machst.

$$(2+\frac{20}{2^2})\cdot(2^2+\frac{12}{2})=(2+5)\cdot(4+6)=7\cdot10=70$$ **b = 70**

$$(x+\frac{20}{x^2})\cdot(x^2+\frac{12}{x})=b \quad |\cdot x$$

1. Lösung: $(x^2+\frac{20}{x})\cdot(x^2+\frac{12}{x})=b\cdot x$ Probe: $(2^2+\frac{20}{2})\cdot(2^2+\frac{12}{2})=70\cdot2 \quad 14\cdot10=140$

2. Lösung: $(x+\frac{20}{x^2})\cdot(x^3+12)=b\cdot x$ Probe: $(2+\frac{20}{2^2})\cdot(2^3+12)=70\cdot2 \quad 7\cdot20=140$

Hintergrund:

Was ist das Doppelte von zwei 5-Euro-Scheinen?

2 · 5 € = 10 € | · 2 Entweder 4 · 5 € = 20 € oder 2 · 10 € = 20 €
Es wird entweder die Anzahl der Geldscheine verdoppelt oder nur der Wert der Geldscheine, aber auf keine Fall beides, denn 4 · 10 € ist nicht das Doppelte von 2 · 5 €

Erkenntnis:
Wenn du ein Produkt multiplizierst, wird nur ein einziger Faktor multipliziert.

Was ist das Doppelte von 3 Äpfel und 2 Birnen?

(3A + 2B) · 2 = 6A + 4B
Wir verdoppeln sowohl die Anzahl der Äpfel als auch die Anzahl der Birnen.

Erkenntnis:
Wenn du eine Summe multiplizierst, wird jeder einzelne Summand multipliziert.

30. Ein Pfund Heidelbeeren kosten 60 cent mehr als ein Pfund Erdbeeren. Für 4 kg Heidelbeeren und 4 kg Erdbeeren müssen Sie 40 € bezahlen.
Wie viel kostet ein Pfund Heidelbeeren, wie viel kostet ein Pfund Erdbeeren?

4 kg entsprechen 8 Pfund.

I $\quad x = y + 0{,}60$ — x: Preis für ein Pfund Brombeeren.
II $\quad 8x + 8y = 40$ — y: Preis für ein Pfund Heidelbeeren.

II $\quad 8x + 8y = 40 \quad | :8 \qquad$ II´ $\quad x + y = 5$

$x = y + 0{,}60$ in Gleichung II´ einsetzen: $y + 0{,}6 + y = 5 \quad | - 0{,}60 \qquad 2y = 4{,}40 \quad | :2 \qquad y = 2{,}20$

$y = 2{,}20$ in $x = y + 0{,}60$ einsetzen: $x = 2{,}20 + 0{,}60 = 2{,}80$

1 Pfund Brombeeren kostet 2,80 € und ein Pfund Heidelbeeren kostet 2,20 €.

Alternativer Lösungsweg:
$40 : 8 = 5 \qquad 5 : 2 = 2{,}50 \qquad 0{,}60 : 2 = 0{,}30 \qquad 2{,}50 + 0{,}30 = 2{,}80 \qquad 2{,}50 - 0{,}30 = 2{,}20$

1 Pfund Brombeeren und 1 Pfund Heidelbeeren kosten zusammen 5 €. Der Mittelwert liegt 2,50 €. Die Preisdifferenz liegt bei 60 cent, also liegt der eine Preis 30 cent unter 2,50 € und der andere 30 cent über 2,50 €.

31. a.) Ein Produkt kostet 88 €. Der Preis wird um 8% gesenkt. Wie viel kostet es dann?

88 € ≙ 100%
0,88 € ≙ 1 % (durch 100 teilen)
7,04 € ≙ 8 % (mit 8 multiplizieren)

88,00 € – 7,04 € = 80,96 € **Das Produkt kostet dann 80,96 €.**

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

31. b.) **Der Preis eines Produktes wurde um 30% reduziert und nun kostet es 49 €. Wie viel hat es vor der Preissenkung gekostet?**

100% − 30% = 70%

49 € ≙	70%		
7 € ≙	10 %	(durch 7 teilen)	
70 € ≙	100 %	(mit 10 multiplizieren)	**Das Produkt kostete vorher 70 €.**

c.) **Der Kurs einer Aktie sinkt zunächst um 40% und steigt dann um 67% an. Um wie viel Prozent hat sich der Aktienkurs ingesamt verändert?**

100 € − 40 € = 60 €

60 € ≙	100%	
6 € ≙	10 %	(durch 10 teilen)
0,6 € ≙	1 %	(durch 10 teilen)
36 € ≙	60 %	(10% mal 6)
4,2 € ≙	7 %	(1% mal 7)
40,2 € ≙	67 %	(60% plus 7%)

60 € + 40,20 € = 100,20 € **Der Aktienkurs ist insgesamt um 0,2% gestiegen.**

32. **Berechne und stellen das Ergebnis als Dezimalzahl dar:**

a.) $150 \cdot 5^{-3} = \frac{150}{5^3} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5} = 1,2$

b.) $\frac{0,49^{\frac{1}{2}}}{2^{-3}} = \sqrt{49} \cdot 2^3 = 7 \cdot 8 = 56$

c.) $10.000^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-2} = \frac{\sqrt[4]{10.000}}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$

d.) $80 \cdot 4^{-3} = \frac{80}{4^3} = \frac{80}{64} = \frac{5}{4} = 1,25$

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

33. **Vereinfache diesen Term durch Anwendung der Potenzgesetze zunächst so weit wie möglich und stelle dann das Ergebnis als Dezimalzahl dar:**

$$\frac{8^{11}\cdot 3^{6}\cdot 36^{3}}{4^{4}\cdot 6^{12}\cdot 2^{5}\cdot 4^{7}}=\frac{8^{11}\cdot 3^{6}\cdot (6^{2})^{3}}{4^{11}\cdot 6^{12}\cdot 2^{5}}=\frac{2^{11}\cdot 3^{6}\cdot 6^{6}}{6^{12}\cdot 2^{5}}=\frac{2^{6}\cdot 3^{6}\cdot 6^{6}}{6^{12}}=\frac{6^{6}\cdot 6^{6}}{6^{12}}=\frac{6^{12}}{6^{12}}=1$$

34. **Berechne:**

a.) $\frac{0,009}{0,036}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0,25$

b.) $\frac{0,65}{0,05}=\frac{65}{5}=13$

c.) 482 · 0,02 = 4,82 · 2 = **9,64**

d.) $\frac{94}{0,02}=\frac{9.400}{2}=4.700$

e.) 0,003 · 0,008 = 0,000003 · 8 = **0,000024**

35. Löse die folgenden Gleichungen nach a auf und mache dann die Probe mit den gegebenen Werten.

a.) $b+\frac{a+f}{c+d}=e$ **a = 13 ; b = 4 ; c = 2 ; d = 3 ; e = 12 ; f = 27**

$b+\frac{a+f}{c+d}=e \quad |-b$

$\frac{a+f}{c+d}=e-b \quad |\cdot(c+d)$

$a+f=(e-b)\cdot(c+d) \quad |-f$

$a=(e-b)\cdot(c+d)-f$

Probe: 13 = (12 – 4) · (2 + 3) – 27 = 8 · 5 – 27 = 40 – 27 = 13

b.) **f = b · c + a · (d + e)** **a = 4 ; b = 3 ; c = 6 ; d = 13 ; e = 7 ; f = 98**

$f=b\cdot c+a\cdot(d+e) \quad |-b\cdot c$

$f-b\cdot c=a\cdot(d+e) \quad |:(d+e)$

$a=\frac{f-b\cdot c}{d+e}$

Probe: $4=\frac{98-3\cdot 6}{13+7}=\frac{98-18}{20}=\frac{80}{20}=4$

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

35. Löse die folgenden Gleichungen nach a auf und mache dann die Probe mit den gegebenen Werten.

c.) $c + a \cdot b = e - a \cdot d$ $\quad a = 5\ ;\ b = 3\ ;\ c = 30\ ;\ d = 7\ ;\ e = 80$

$c + a \cdot b = e - a \cdot d \mid + a \cdot d - c \qquad a \cdot b + a \cdot d = e - c \mid T \qquad a \cdot (b + d) = e - c \mid : (b + d)$

$$a = \frac{e - c}{b + d}$$

Probe: $5 = \frac{80 - 30}{3 + 7} = \frac{50}{10} = 5$

36. Bestimme jeweils die Leistung P und den Widerstand R.

Erster Hinweis: **P = 1 V · 1 A = 1 W** **R = 1 V / 1 A = 1 Ω**

Zweiter Hinweis: Die Zahlenwerte müssen zw. 0,1 und 1000 liegen. Z.B.: 2.000 W = 2 kW ; 0,05 W = 50 mW

a.) P = 150 mV · 50 mA = 7.500 µW = **7,5 mW** $\quad R = \frac{150\text{mV}}{50\text{mA}} = 3\Omega$

b.) P = 80 kV · 20 mA = 1.600 W = **1,6 kW** $\quad R = \frac{80\text{kV}}{20\text{mA}} = 4\text{M}\Omega$

c.) P = 10 µV · 200 µA = 2.000 pW = **2 nW** $\quad R = \frac{10\mu\text{V}}{200\mu\text{A}} = 0{,}05\Omega = 50\text{m}\Omega$

d.) P = 10 µV · 500 nA = 10 µV · 0,5 µA = **5 pW** $\quad R = \frac{10\mu\text{V}}{0{,}5\mu\text{A}} = 20\Omega$

e.) P = 10 MV · 2 kA = **20 GW** $\quad R = \frac{10\text{MV}}{2\text{kA}} = 5\text{k}\Omega$

37. Ein Fahrradfahrer fährt mit konstant 14 km/h bergauf und dann sofort die gleiche Strecke mit konstant 42 km/h bergab. Wie hoch ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit auf der gesamten Strecke?

Du wählst eine geeignete Gesamtstrecke, am besten 42 km + 42 km = 84 km.

1. Hälfte der Strecke: 42 km / 14 km/h = 3h
2. Hälfte der Strecke: 42 km / 42 km/h = 1h

3 h + 1 h = 4h $\quad \frac{84\text{km}}{4\text{h}} = 21\text{km/h}$

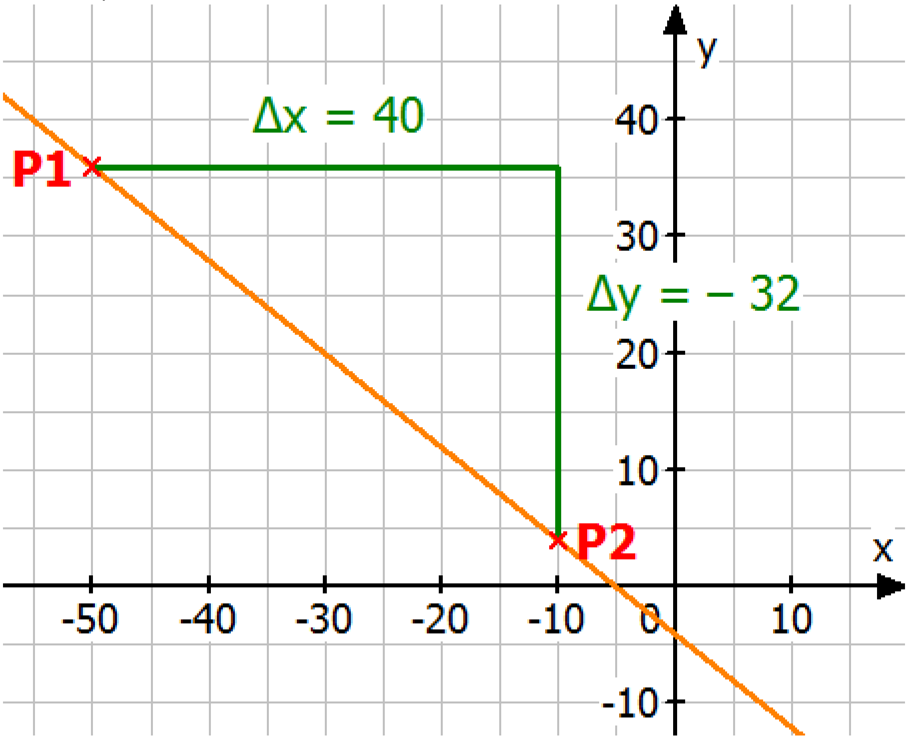
Die mittlere Geschwindigkeit beträgt **21 km/h**.

38. Bestimme Gleichung der zu dieser Wertetabelle gehörenden Geraden:

x	-50	-30	-10	10	30
Y	36	20	4	-12	-28

Die y-Werte werden von links nach rechts kleiner. Die Steigung der Geraden ist also negativ.

Das siehst du auch, wenn du die Gerade zeichnest:



Du nimmst zwei beliebige Punkte auf der Geraden (Wertepaare). Zum Beispiel $P_1(-50|36)$ und $P_2(-10|4)$.
Wie lang ist die waagrechte Seite des oben grün eingezeichneten Steigungsdreiecks? 40 Einheiten.
Wie lang ist die senkrechte Seite des oben grün eingezeichneten Steigungsdreiecks? − 32 Einheiten.

Wie ist die Steigung m definiert? Senkrechte Seite durch waagrechte Seite, also − 32 / 40 = − 0,8

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 36}{-10 - (-50)} = \frac{-32}{40} = -0,8$$

y = 4 ; m = − 0,8 und x = −10 in y = m · x + b einsetzen und dann nach b auflösen:

4 = − 0,8 · (− 10) + b = 8 + b | − 8 b = − 4 **y = − 0,8 · x − 4**

Hinweis: Statt y = 4 und x = − 10 hättest du auch jedes andere Wertepaar einsetzen können.

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

39. Du bist mit 45,5 Litern Benzin 700 km weit gefahren. Ein Liter Benzin kostet 1,80 €.
a.) Wie hoch ist dein Benzinverbrauch auf 100 km gewesen?
b.) Wie viel kostet es dich bei diesem Benzinverbrauch 250 km weit zu fahren?

a.) $\frac{45,5}{7} = \frac{42+3,5}{7} = 6+0,5 = 6,5$ **Der Benzinverbrauch auf 100 km beträgt 6,5 Liter.**

b.) $1,8 \cdot 6,5 = 1,8 \cdot 6 + 1,8 \cdot 0,5 = 10,8 + 0,9 = 11,7$ **100 km weit fahren, kostet 11,70 €**

$11,7 \cdot 2,5 = 11,7 \cdot 2 + 11,7 \cdot 0,5 = 23,4 + 5,85 = 29,25$ **Es kostet 29,25 €.**

40. Fasse diese Potenzen so weit wie möglich zusammen und stellen dann das Ergebnis als Dezimalzahl dar:

a.) $$\frac{4^3 \cdot 10^{-8} \cdot 5^{12} \cdot 4^6}{2^8 \cdot 5^3} = \frac{4^9 \cdot 5^9}{10^8 \cdot 2^8} = \frac{20^9}{20^8} = 20$$

b.) $$\frac{4^{10} \cdot 1.000^3 \cdot 36^7}{2^{18} \cdot 10^{10} \cdot 6^{13}} = \frac{(2^2)^{10} \cdot (10^3)^3 \cdot (6^2)^7}{2^{18} \cdot 10^{10} \cdot 6^{13}} = \frac{2^{20} \cdot 10^9 \cdot 6^{14}}{2^{18} \cdot 10^{10} \cdot 6^{13}} = \frac{2^2 \cdot 6}{10} = \frac{24}{10} = 2,4$$

c.) $$\frac{2^5 - 2^3}{5^3 - 5^2} = \frac{32-8}{125-25} = \frac{24}{100} = 0,24$$

Hinweis:
Hier lassen sich keine Potenzen zusammenfassen.

41. Es kosten 8 kg Himbeeren und 5 kg Aprikosen 46,00 €.
Es kosten 2 kg Himbeeren und 12 kg Aprikosen 33,00 €.
Wie viel kostet ein kg Himbeeren?
Wie viel kostet ein kg Aprikosen?

x: Preis pro kg Himbeeren in €.   y: Preis pro kg Aprikosen in €.

Lösungsweg A: (Addtionsverfahren)

I $8x + 5y = 46{,}00$
II $2x + 12y = 33{,}00$

$4 \cdot$ II $8x + 48y = 132{,}00$
I $8x + 5y = 46{,}00$

$4 \cdot$ II – I $43y = 86 \quad | : 43$

$y = 2{,}00$

$y = 2{,}00$ in Gleichung II einsetzen:

$2x + 12 \cdot 2 = 33 \quad | - 24$

$2x = 9 \quad | : 2$

$x = 4{,}50$

Lösungsweg B: (Einsetzungsverfahren)

I $8x + 5y = 46{,}00$
II $2x + 12y = 33{,}00$

Gleichung II nach x auflösen:

$2x + 12y = 33{,}00 \quad | - 12y \quad | : 2 \qquad x = 16{,}50 - 6y$

$x = 16{,}50 - 6y$ in Gleichung I einsetzen

$8 \cdot (16{,}50 - 6y) + 5y + = 46{,}00 \quad | \ \mathrm{T}$

$132{,}00 - 48y + 5y = 46{,}00 \quad | - 132{,}00$

$-43y = -86 \quad | : (-43) \qquad y = 2{,}00$

$y = 2{,}00$ in $x = 16{,}50 - 6y$ einsetzen:

$y = 16{,}50 - 6 \cdot 2{,}00 = 16{,}50 - 12{,}00 = 4{,}50$

Ein kg Himbeeren kostet 4,50 €.   Ein kg Aprikosen kostet 2,00 €.

Hinweis: Es gibt auch noch das Gleichsetzungsverfahren.

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

42. Fasse diese Brüche zu einem Bruch zusammen und kürze diese soweit wie möglich:

a.) $3 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{\pi \cdot r^2}{8}$

Du kannst $\pi \cdot r^2$ ersetzen durch etwas, das dir aus deinem Alltag gut vertraut ist, eine Pizza zum Beispiel.

Du hast drei Viertel einer Pizza und isst zweimal ein Achtel der Pizza. Dann ist eine halbe Pizza übrig.

$$3 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{\pi \cdot r^2}{8} = \frac{6 \cdot \pi \cdot r^2}{8} - \frac{1 \cdot \pi \cdot r^2}{8} - \frac{1 \cdot \pi \cdot r^2}{8} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{8} = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

b.) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{15} - \frac{19}{20} - \frac{1}{4} : \frac{3}{7} = \frac{3}{2} + \frac{21}{30} - \frac{19}{20} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{3}{2} + \frac{21}{30} - \frac{19}{20} - \frac{7}{12} = \frac{90}{60} + \frac{42}{60} - \frac{57}{60} - \frac{35}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

43. Ein Liter Wasser nimmt ein Volumen von 1.000 cm³ ein.
Bestimmen Sie das Volumen in m³ und in mm³.

10 cm · 10 cm · 10 cm = 1.000 cm³

0,1 m · 0,1 m · 0,1 m = **0,001 m³** 100 mm · 100 mm · 100 mm = **1.000.000 mm³**

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

44. Löse die Klammern auf und fasse soweit wie möglich zusammen:

a.) $-(x-3)\cdot(x+5)-(x-4)^2 = -(x^2+5x-3x-15)-(x^2-8x+16)$

$= -(x^2+2x-15)-x^2+8x-16 = -x^2-2x+15-x^2+8x-16 = \mathbf{-2x^2+6x-1}$

b.) $23x-4x\cdot(9x-2\cdot(3+4{,}5x)) = 23x-4x\cdot(9x-6-9x) = 23x-4x\cdot(-6)$
$= 23x+24x = \mathbf{47x}$

45. Jemand kauft 10 Mineralwasserkisten (M = 10). In jeder Kiste sind zwölf Flaschen (N = 12). Für jede Flasche bezahlt er 0,45 € (W = 0,45) für das Wasser und 0,15 € (P = 0,15) für das Pfand. Außerdem kostet jede Kiste 1,50 € Pfand (K = 1,50).
a.) Wie viel muss er insgesamt bezahlen?
b.) Stelle allgemein die Gleichung für die Gesamtkosten G auf, wobei jede Variable in dieser Gleichung nur einmal vorkommen soll.

a.) $0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}60$ (Flasche plus Pfand) $12\cdot 0{,}60 + 1{,}50 = 7{,}20 + 1{,}50 = 8{,}70$ (eine Kiste)

$10\cdot 8{,}70 = 87$ **Er muss ingesamt 87 € bezahlen.**

b.) $\mathbf{G = M\cdot(N\cdot(W+P)+K)}$

46. Nach Mietwagentarif A beträgt die Grundgebühr 18 € und der Preis pro km 15 cent. Wie weit ist jemand gefahren, der insgesamt 38,10 € bezahlt? Tarif B soll bei 200 km Fahrleistung um 4 € günstiger sein als Tarif A und die Grundgebühr soll 20 € betragen. Wie hoch muss dann der Preis pro km nach Tarif B sein?

$38{,}10 - 18 = 20{,}10$ $20{,}10 / 0{,}15 = 134$ **Er ist 134 km weit gefahren**

$200\cdot 0{,}15 + 18 = 30 + 18 = 48$ 200 km kosten nach Tarif A 48 €

$48 - 4 = 44$ $44 - 20 = 24$ $24 / 200 = 0{,}12$ Der Preis pro km muss **12 cent** betragen.

47. Wähle für jede Variable einen geeigneten Wert, so dass die Gleichung erfüllt ist. Löse dann die Gleichungen nach a auf und mach die Probe mit deinen selbst gewählten Werten.

a.) $e = b \cdot a + c \cdot d$ zum Bespiel: **e = 31; b = 3; a = 5 ; c = 2 ; d = 8** erfüllen die Gleichung.

$e = b \cdot a + c \cdot d \quad | - c \cdot d \qquad e - c \cdot d = b \cdot a \quad | : b \qquad a = \frac{e - c \cdot d}{b}$

Probe: $5 = a = \frac{e - c \cdot d}{b} = \frac{31 - 2 \cdot 8}{3} = \frac{31 - 16}{3} = \frac{15}{3} = 5$

Hinweis: **die Probe stellt keinen Beweis dafür dar, dass die Gleichung korrekt umgestellt wurde. Umgekehrt gilt jedoch: wenn die Probe nicht funktioniert, ist die Gleichung nicht richtig umgestellt worden. Es muss e ≠ 0 gelten!**

b.) $\frac{a}{b} - c = d$ zum Bespiel: **a = 80; b = 8; c = 7 ; d = 3** erfüllen die Gleichung.

$\frac{a}{b} - c = d \quad | + c \qquad \frac{a}{b} = d + c \quad | \cdot d \qquad a = (d + c) \cdot d$

Probe: 80 = a = (3 + 7) · 8 = 10 · 8 = 80

c.) $\frac{b}{a \cdot (c + d)} = e$ zum Bespiel: **a = 4; b = 120; c = 9 ; d = 6 ; e = 2** erfüllen die Gleichung.

$\frac{b}{a \cdot (c + d)} = e \quad | \cdot a \quad |: e \qquad a = \frac{b}{e \cdot (c + d)}$

Probe: $4 = a = \frac{b}{e \cdot (c + d)} = \frac{120}{2 \cdot (9 + 6)} = \frac{120}{2 \cdot 15} = \frac{120}{30} = 4$

d.) $\frac{b}{a \cdot c + d} = e$ zum Bespiel: **a = 4; b = 84; c = 9 ; d = 6 ; e = 2** erfüllen die Gleichung.

$\frac{b}{a \cdot c + d} = e \quad | \cdot (a \cdot c + d) \quad |: e \qquad \frac{b}{e} = a \cdot c + d \quad | - d \quad |: c \qquad a = \frac{\frac{b}{e} - d}{c}$

Probe: $4 = a = \frac{\frac{84}{2} - 6}{9} = \frac{42 - 6}{9} = \frac{36}{9} = 4$

Ansgar Schiffler

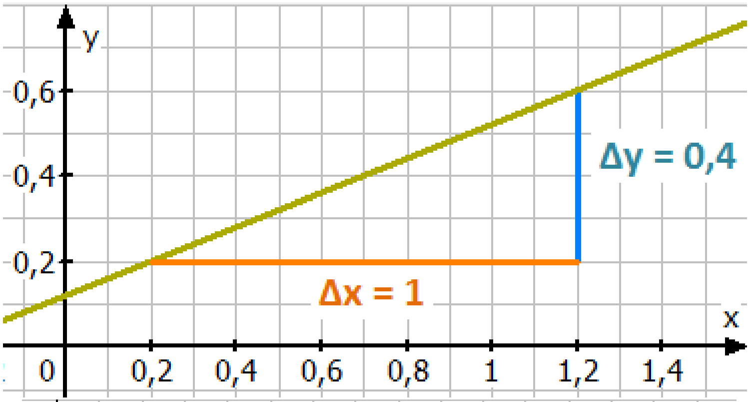
Lösungen: Grundlagen der Mathematik

48. Fasse zu einem Bruch zusammen und kürze dann diesen Bruch so weit wie möglich.

a.) $$\frac{30a^2-6ab}{6a}-\frac{16ab-4b^2}{4b}=5a-b-(4a-b)=5a-b-4a+b=a$$

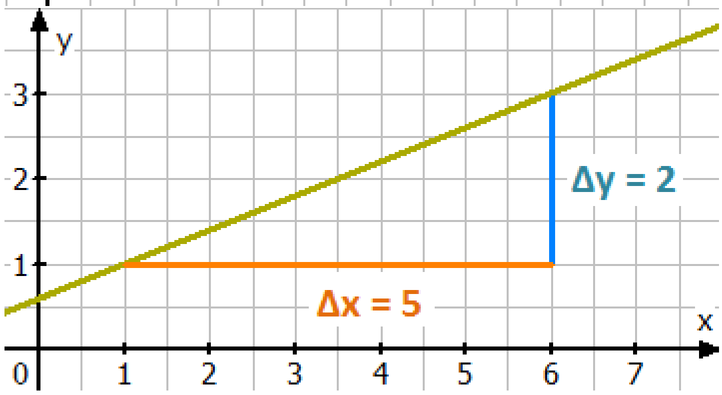
b.) $$7a^2\cdot\frac{2b}{a}-5b^2\cdot\frac{3a}{b}=14ab-15ab=-ab$$

49. Vorüberlegungen zum Thema ‘Steigung‘: Was bedeutet eigentlich Steigung m = 0,4 ?



Steigung m = 0,4 bedeutet:

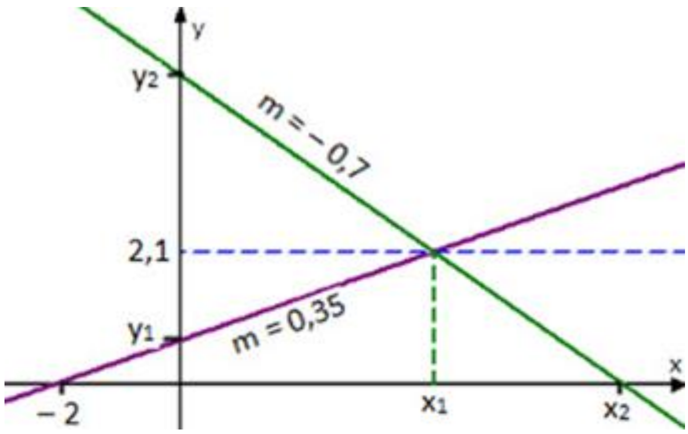
Wenn du von einem Punkt der Geraden um eine Einheit nach rechts gehst, dann musst du um 0,4 Einheiten nach oben gehen, damit du dich wieder auf der Geraden befindest.



Und wenn wir nicht ein Einheit nach rechts gehen, sondern z.B. 5 Einheiten? Wie weit müssen wir dann nach oben gehen, um uns wieder auf der Geraden zu befinden?
Ganz einfach: 2 Einheiten, denn 5 · 0,4 = 2

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Delta y = m\cdot\Delta x \qquad \Delta x=\frac{\Delta y}{m}$$

Bestimme x_1, x_2, y_1, y_2 (siehe Bild rechts)



2 · 0,35 = 0,7 $\quad y_1 = \mathbf{0,7}$

2,1 / 0,35 = 6 $\quad$ 6 – 2 = 4 $\quad x_1 = \mathbf{4}$

2,1 / 0,7 = 3 $\quad$ 4 + 3 = 7 $\quad x_2 = \mathbf{7}$

4 · 0,7 = 2,8 $\quad$ 2,1 + 2,8 = 4,9 $\quad y_2 = \mathbf{4,9}$

50. a.) Ein Produkt kostet zunächst 87 €. Der Preis sinkt um 3%. Wie teuer ist es dann?

87 € ≙ 100%
0,87 € ≙ 1 % (durch 100 teilen)
2,61 € ≙ 3 % (mit 3 multiplizieren)

87,00 € – 2,61 € = 84,39 € **Das Produkt kostet dann 84,39 €.**

b.) Ein Produkt kostet 120 €, nachdem der Preis um 20% reduziert wurde. Wie teuer war es zuvor?

100% − 20% = 80%

120 € ≙ 80%
30 € ≙ 20 % (durch 4 teilen)
150 € ≙ 100 % (mit 5 multiplizieren) **Das Produkt kostete vorher 150 €.**

c.) Der Preis eines Produktes wird um 13% erhöht. Es kostet nun 339 €. Wie teuer war es vorher?

100% + 13% = 113%

339 € ≙ 113%
3 € ≙ 1 % (durch 113 teilen)
300 € ≙ 100 % (mit 100 multiplizieren) **Das Produkt kostete vorher 300 €.**

d.) Der Preis eines Produktes wird um 38% reduziert und anschließend steigt der Preis um 50% an. Um wie viel Prozent hat sich der Preis insgesamt verändert?

100 € − 38 € = 62 €

62 € ≙ 100%
31 € ≙ 50 % (durch 2 teilen)

62 € + 31 € = 93 € 100 € − 93 € = 7 € **Der Aktienkurs ist insgesamt um 7% gesunken.**

51. Fasse zu einem Bruch zusammen und kürze diesen Bruch so weit wie möglich.

a.) $$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{42}=\frac{7}{42}-\frac{1}{42}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

b.) $$2a\cdot\frac{ab}{10a^2b}+\frac{1}{2}:2=\frac{2a^2b}{10a^2b}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$$

52. Ein quaderförmiges Paket ist 20 cm lang, 20 cm breit und 40 cm hoch. Wie viele dieser Pakete nehmen ein Volumen von 4 m³ ein?

20 cm · 20 cm · 40 cm = 16.000 cm³ 4 m³ = 4.000.000 cm³

$$\frac{4.000.000\text{cm}^3}{16.000\text{cm}^3}=250$$ **250 dieser Pakete nehmen ein Volumen von 4 m³ ein.**

Alternativer Lösungsweg: 4 m³ entsprechen einem 1 m mal 1 m großem Raum, der 4 Meter hoch ist.
1 m / 20 cm = 5 Auf den Boden passen 5 mal 5 Pakete, also 25 Stück.
4 m / 40 cm = 10 Es gibt 10 „Schichten" zu je 25 Paketen. 25 · 10 = **250**

53. Nach Mietwagentarif A beträgt die Grundgebühr 16 € und der Preis pro km 30 cent. Nach Tarif B sind es 40 € Grundgebühr und 18 cent pro km.
a.) Bei welcher Fahrleistung sind beide Tarife gleich teuer?
b.) Die beiden Geraden $y = m_1 \cdot x + b_1$ und $y = m_2 \cdot x + b_2$ schneiden sich.
Bestimme die x-Koordinate des Schnittpunktes. Hinweis: $m_1 \neq m_2$

a.) $0{,}3 \cdot x + 16 = 0{,}18 \cdot x + 40 \;|\; -0{,}18 \cdot x - 16 \qquad 0{,}12 = 24 \;|\; :0{,}12 \qquad x = 200$

Bei einer Fahrleistung von **200 km** sind beide Tarife gleich teuer.

b.) $m_1 \cdot x + b_1 = m_2 \cdot x + b_2 \;|\; - m_2 \cdot x - b_1 \qquad (m_1 - m_2) \cdot x = b_2 - b_1 \;|\; :(m_1 - m_2)$ $$x=\frac{b_2-b_1}{m_1-m_2}$$

Beachte bitte, dass Aufgaben a und b identisch sind. Bei Aufgabe b erhälst du die Formel, wie solch eine Aufgabe zu lösen ist. Tarif B hat eine um 24 € höhere Grundgebühr ($b_2 - b_1$), aber der Preis pro km ist um 0,12 € günstiger ($m_1 - m_2$). Ab wie vielen km lohnt sich die höhere Grundgebühr? 24 / 0,12 = 200.

54. Berechne:

a.) $\frac{0,9}{0,045}=\frac{90}{4,5}=20$

b.) $\frac{0,015}{0,12}=\frac{1,5}{12}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}=0,125$

c.) $165\cdot 0,03 = 1,65\cdot 3 = \mathbf{4,95}$

d.) $\frac{1,2}{0,08}=\frac{120}{8}=\frac{60}{4}=15$

e.) $0,04\cdot 0,09 = 0,0004\cdot 9 = \mathbf{0,0036}$

55. Für einen Mietwagen ist eine Grundgebühr in Höhe von 19,80 € zu zahlen und jeder km kostet 22 cent. Sie müssen 28,60 € bezahlen. Wie viele km bist du gefahren?

28,60 – 19,80 = 8,80 8,80 / 0,22 = 40 Du bist **40 km** gefahren.

56. Vereinfache diesen Term durch Anwendung der Potenzgesetze so weit wie möglich und stelle dann das Ergebnis als Dezimalzahl dar: (Hinweise: 3 · 3 = 9 und 2 · 2 · 2 = 8)

$$\frac{3^3\cdot 2^{14}\cdot 3^8\cdot 26^4}{8^6\cdot 13^4\cdot 9^5}$$

$$\frac{3^3\cdot 2^{14}\cdot 3^8\cdot 26^4}{8^6\cdot 13^4\cdot 9^5}=\frac{3^{11}\cdot 2^{14}\cdot 26^4}{(2^3)^6\cdot 13^4\cdot (3^2)^5}=\frac{3^{11}\cdot 2^{14}\cdot 26^4}{2^{18}\cdot 13^4\cdot 3^{10}}=\frac{3\cdot 26^4}{2^4\cdot 13^4}=\frac{3\cdot 26^4}{26^4}=3$$

57. Fasse diese Potenzen zunächst so weit wie möglich zusammen. Stelle dann das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a.) $45\cdot 5^{-2}=\frac{45}{5^2}=\frac{45}{25}=\frac{9}{5}=1,8$

b.) $\frac{85+5\cdot 10^{-1}}{5}=17+10^{-1}=17+\frac{1}{10}=17+0,1=17,1$

c.) $2^{13}\cdot 5^{11}\cdot 10^{-10}=\frac{2^3\cdot 2^{10}\cdot 5\cdot 5^{10}}{10^{10}}=\frac{2^3\cdot 5\cdot 10^{10}}{10^{10}}=2^3\cdot 5=8\cdot 5=40$

d.) $\frac{8\cdot 18^4-12\cdot 9^{-4}}{2\cdot 18^4-3\cdot 9^{-4}}=\frac{4\cdot(2\cdot 18^4-3\cdot 9^{-4})}{2\cdot 18^4-3\cdot 9^{-4}}=4$

e.) $\frac{5^{-1}-20^{-1}}{10^{-1}-5^{-1}}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{5}}=\frac{0,2-0,05}{0,1-0,2}=\frac{0,15}{-0,1}=-1,5$

Ansgar Schiffler

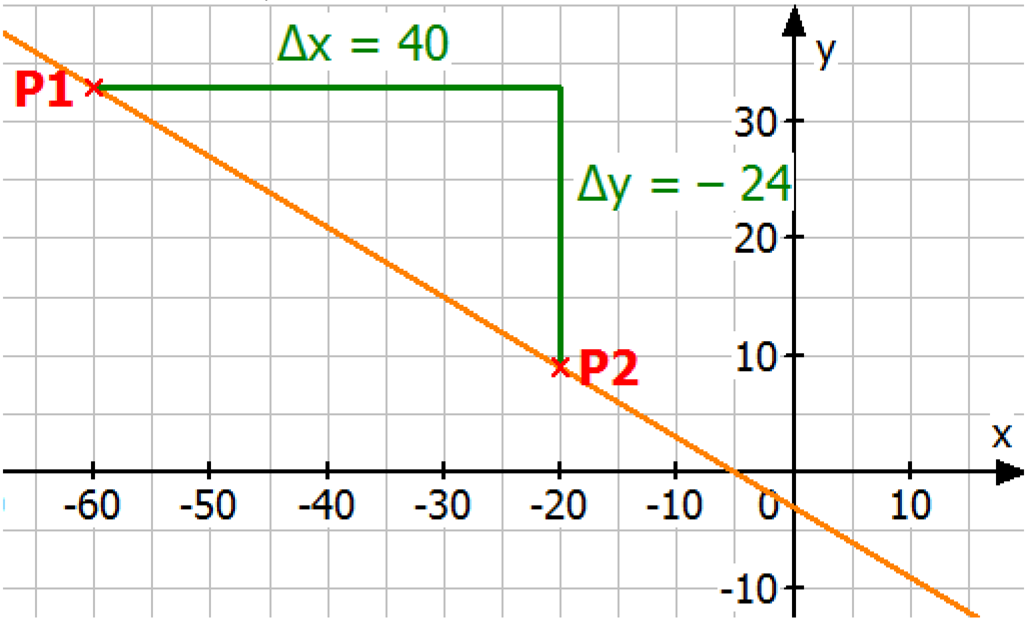
Lösungen: Grundlagen der Mathematik

58. Bestimme die Gleichung der zu dieser Wertetabelle gehörenden Geraden:

x	-100	-60	-20	20	60
Y	57	33	9	-15	-39

Die y-Werte werden von links nach rechts kleiner. Die Steigung der Geraden ist also negativ.

Das siehst du auch, wenn du die Gerade zeichnest:



Du nimmst zwei beliebige Punkte auf der Geraden (Wertepaare). Zum Beispiel $P_1(-60|33)$ und $P_2(-20|9)$.
Wie lang ist die waagrechte Seite des oben grün eingezeichneten Steigungsdreiecks? 40 Einheiten.
Wie lang ist die senkrechte Seite des oben grün eingezeichneten Steigungsdreiecks? – 24 Einheiten.

Wie ist die Steigung m definiert? Senkrechte Seite durch waagrechte Seite, also – 24 / 40 = – 0,6

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 33}{-20 - (-60)} = \frac{-24}{40} = -0,6$$

y = 9 ; m = – 0,6 und x = −20 in y = m · x + b einsetzen und dann nach b auflösen:

9 = – 0,6 · (– 20) + b = 12 + b | – 12 b = – 3 **y = – 0,6 · x – 3**

Hinweis: Statt y = 4 und x = – 10 hättest du auch jedes andere Wertepaar einsetzen können.

59. Ein Provider A für mobiles Internet verlangt eine Grundgebühr in Höhe von 2,90 € und pro Gigabyte (GB) Datenvolumen 80 cent. Ein Mitbewerber B verlangt eine Grundgebühr in Höhe von 4,90 € und möchte bei einem Datenvolumen von 10 GB genauso teuer sein wie Anbieter A. Welchen Preis pro GB Datenvolumen muss er verlangen?

$y = f_A(x) = 0{,}80 \cdot x + 2{,}90$ x : Datenvolumen in GB   y: Kosten in €

$f_A(10) = 10{,}90$ $f_B(x) = m \cdot x + 4{,}90$ $f_B(10) = m \cdot 10 + 4{,}90 = 10{,}90 \;|\; -4{,}90 \;|\; :10$ $m = 0{,}60$

Er muss **60 cent** pro GB Datenvolumen verlangen.

Ausführlicherer Lösungsweg:

Wie viel verlangt Provider A für 10 GB Transfervolumen?   0,80 € · 10 + 2,90 € = 8,00 € + 2,90 € = 10,90 €

Du ziehst von den 10,90 € die Grundgebühr in Höhe von 4,90 € ab.   10,90 € − 4,90 € = 6,00 €

Es bleiben 6 € übrig. Es kosten also 10 GB 6 €. Wie viel kostet dann ein 1 GB?   6 € / 10 = 0,6 €.

60. 9 Zitronen und 2 Orangen kosten 2,80 €
7 Zitronen und 5 Orangen kosten 3,90 €
Wie viel kostet eine Zitrone und wie viel kostet eine Orange?

Preis für eine Zitrone in €   y: Preis für eine Orange in €

I $9x + 2y = 2{,}80$ 5 · I $45x + 10y = 14{,}00$
II $7x + 5y = 3{,}90$ 2 · II $14x + 10y = 7{,}80$

5 · I − 2 · II $31x = 6{,}20 \;|\; :31$ **$x = 0{,}20$**

x = 0,20 in Gleichung I einsetzen: $1{,}8 + 2y = 2{,}80 \;|\; -1{,}8 \;|\; :2$ **$y = 0{,}50$**

Eine Zitrone kostet 20 cent und eine Orange kostet 50 cent.

61. Der Kurs einer Aktie sinkt um 40%. Anschließend steigt der Kurs um 40% an. Wie hat sich der Aktienkurs insgesamt verändert?

100 € − 40 € = 60 €   60 € · 1,4 = 84 €   100 € − 84 € = 16 €   **Der Kurs ist um 16% gesunken.**

Ansgar Schiffler

Lösungen: Grundlagen der Mathematik

62. Vereinfache diese Brüche soweit wie mögich:

a.) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}:4-\frac{3}{4}:\frac{8}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{4}{32}+\frac{1}{32}-\frac{9}{32}=-\frac{4}{32}=-\frac{1}{8}$

b.) $\frac{9x^2+15xy+3x}{3x}=\frac{3x\cdot(3x+5y+1)}{3x}=3x+5y+1$

c.) $7\cdot a\cdot b^2\cdot\frac{3\cdot a}{20\cdot b^2}-\frac{3\cdot(a^2\cdot b)^2}{10\cdot a^2\cdot b^2}-\frac{3}{2}a^2:2=\frac{21\cdot a^2\cdot b^2}{20\cdot b^2}-\frac{6\cdot a^4\cdot b^2}{20\cdot a^2\cdot b^2}-\frac{3}{4}a^2=\frac{21\cdot a^2}{20}-\frac{6\cdot a^2}{20}-\frac{15}{20}a^2=0$

d.) $\frac{12x+21}{4x+7}=\frac{3\cdot(4x+7)}{4x+7}=3$

e.) $\frac{4x^2-100}{4x-20}=\frac{4\cdot(x^2-25)}{4\cdot(x-5)}=\frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)}=x+5$

f.) $\frac{x^2+14x+49}{5x+35}=\frac{(x+7)^2}{5\cdot(x+7)}=\frac{x+7}{5}$

63. Es kosten 3 Flaschen Weißwein und 3 Flaschen Rotwein 27 €.
Es kosten 6 Flaschen Weißwein und 2 Flaschen Rotwein 34 €.
Wie viel kostet eine Flasche Weißwein? Wie viel kostet eine Flasche Rotwein?

Preis für eine Flasche Weißwein in € y: Preis für eine Flasche Rotwein in €

I $3x + 3y = 27$ 2 · I $6x + 6y = 54$
II $6x + 2y = 34$

2 · I − II $4y = 20$ | : 4 **$y = 5$**

$y = 5$ in Gleichung II einsetzen: $6x + 10 = 34$ | − 10 | : 6 **$x = 4$**

Eine Flasche Weißwein kostet 4 € und eine Flasche Rotwein kostet 5 €.

64. **Welche x erfüllen die folgende Gleichung? Bestätige dein Ergebnis durch eine Probe!**

$102 - (x+3)^2 = -(x-2)\cdot(x-3)$

$102 - (x^2 + 6x + 9) = -(x^2 - 2x - 3x + 6)$

$102 - x^2 - 6x - 9 = -x^2 + 5x - 6 \quad | + x^2 + 6x + 6$

$99 = 11x \mid :11$ **$x = 9$** Probe: $102 - (9+3)^2 = 102 - 12^2 = 102 - 144 = \mathbf{-42}$
$-(9-2)\cdot(9-3) = -7\cdot 6 = \mathbf{-42}$

65. **Du fährst mit dem Auto von A nach B. Auf der ersten Hälfte der Strecke fährst du 30 km/h und auf der zweiten Hälfte der Strecke fährst du 150 km/h schnell.**
Wie hoch ist deine mittlere Geschwindigkeit auf der Gesamtstrecke?

Du wählst eine geeignete Gesamtstrecke, am besten 150 km + 150 km = 300 km.

1. Hälfte der Strecke: 150 km / 30 km/h = 5h
2. Hälfte der Strecke: 150 km / 150 km/h = 1h

5 h + 1 h = 6h

$$\frac{300\text{km}}{6\text{h}} = 50\text{km}/\text{h}$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt **50 km/h**.

66. **Du fährst mit dem Auto von A nach B. Auf der ersten Hälfte der Strecke fährst du 50 km/h. Mit welcher mittleren Gechwindigkeit musst Du auf der zweiten Hälfte der Strecke fahren, damit du am Ziel eine mittlere Geschwindigkeit von 100 km/h auf die Gesamtstecke gefahren bist?**

Du wählst eine einfache Gesamtstrecke, am besten 100 km.

Wie viel Zeit hast du für die Gesamtstrecke? 100 km / 100 km/h = 1 h

Wenn du eine Schnitt von 100 km/h schaffen möchtest, musst du die 100 km in einer Stunde zurücklegen.

Wie lange brauchst du für die ersten 50 km? 50 km / 50 km/h = 1 h.

Für die zweiten 50 km bleiben dir also 0 Sekunden Zeit. **Das ist nicht zu schaffen.**